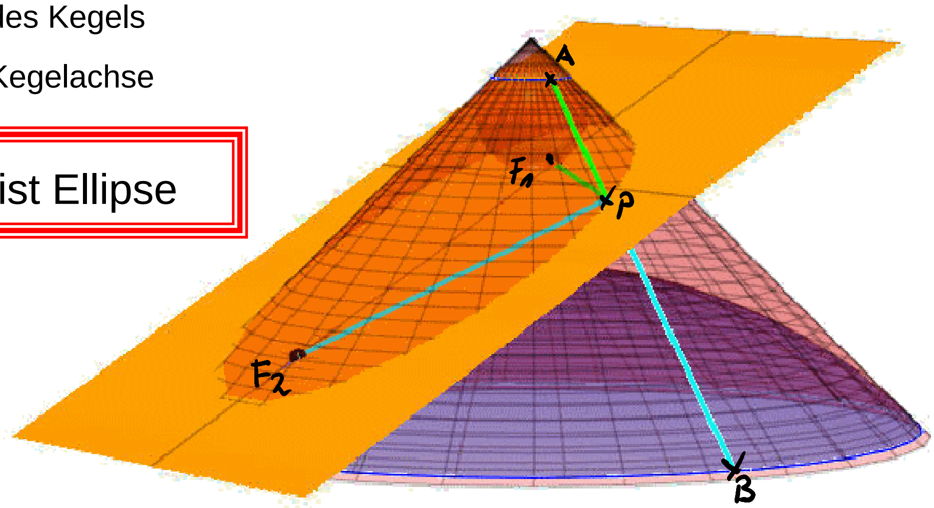
α = halber Öffnungswinkel des Kegels

β = Winkel zw. Ebene und Kegelachse



$\alpha < \beta$ Kegelschnitt ist Ellipse

Beweis:

$\overline{PF_1} = \overline{PA}$ gleiche Tangentenabschnitte

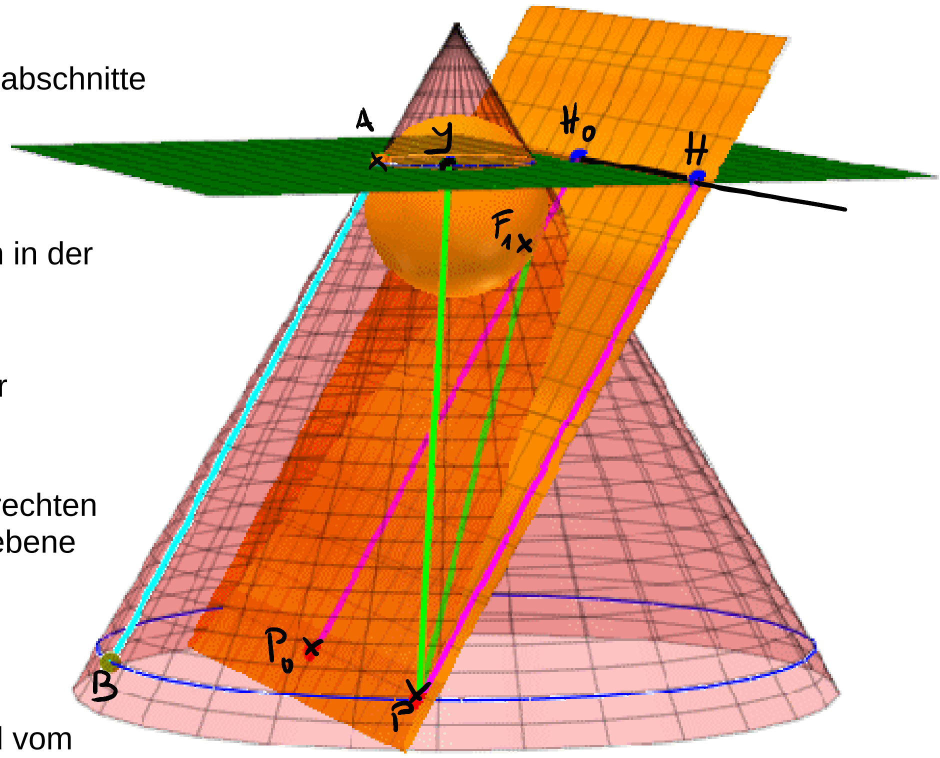
$\overline{PF_2} = \overline{PB}$ gleiche Tangentenabschnitte

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{AB} = konst.$, zwischen parallelen Kreisen

Also gilt für die Schnittkurve die Fadenkonstruktion der Ellipse, also ist sie eine Ellipse. q.e.d.

$\alpha = \beta$ Kegelschnitt ist Parabel

Beweis



$\overline{PF} = \overline{PJ}$ gleiche Tangentenabschnitte

$\overline{PJ} = \overline{AB}$ zwischen parallelen Kreisen

$\overline{AB} = \overline{P_0H_0}$ Parallelogramm in der Symmetrieebene.

$\overline{P_0H_0} = \overline{PH}$ Rechteck in der Schnittebene

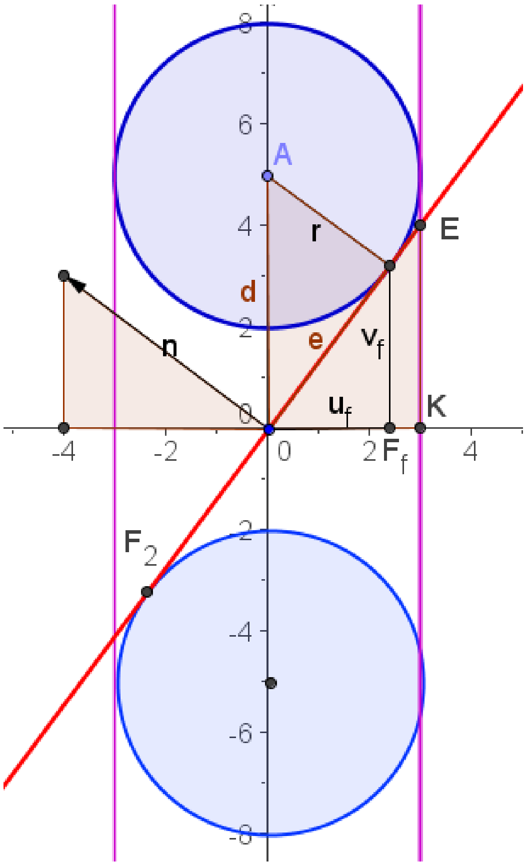
Die Schnittgerade der waagerechten Berührebene und der Schnittebene dient als Leitgerade. H ist der Fußpunkt des Lotes auf die Leitgerade.

Zusammen ist $\overline{PF} = \overline{PH}$,
P hat also denselben Abstand vom Brennpunkt wie von der Leitgeaden.
Daher ist der geometrische Ort von P eine Parabel. q.e.d.

dandelin-elli-par.pdf

Siehe auch Kurvenheft S. 20

Ellipsen -Salami, Dandelinsche Kugeln im Zylinder



$d^2 = e^2 + r^2$ ①

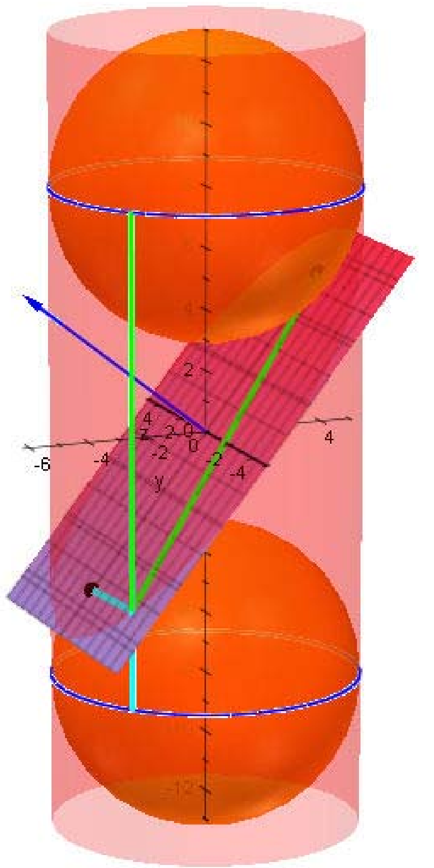
$\vec{n} = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ Ebene $-ex + rz = 0$

Ähnlichkeit $\frac{v}{e} = \frac{e}{d} \Leftrightarrow v = \frac{e^2}{d} \overset{①}{=} \frac{d^2-r^2}{d}$

$\frac{u}{e} = \frac{r}{d} \Leftrightarrow u = \frac{r}{d}\sqrt{d^2-r^2}$

Brennpunkte $F_1 = (u,v)$ $F_2(-u,-v)$

Nach Wahl von d unf r kann man nun die rechte Zeichnung herstellen.



Satz: Zylinderschnitte sind Ellipsen

Beweis: Die grün-blaue Stange auf dem Zylindermantel ist überall gleichlang.

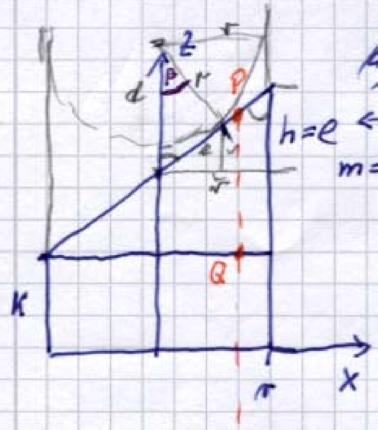
Die Punkte, an denen die Kugeln die Ebene berühren, sollen F_{oben} und F_{unten} heißen Der Punkt, er heiße P, an dem die Stange die schräge Ebene durchstößt, ist vom oberen Berührkreis und von F_{oben} gleich weit entfernt, wie man sich leicht überlegt. Ebenso ist er vom unteren Berührkreis und von F_{unten} gleich weit entfernt. Nun ist die grün-blaue Stange auch auf der Ebene zu sehen, also ist die Summe der Entfernungen von P von F_{oben} und F_{unten} konstant. Diese Aussage ist gerade sie **Fadenkonstuktion der Ellipse**. Also handelt es sich bei der Schnittkurve um eine Ellipse. q.e.d.

Schneidet man also eine Salami-Wurst, so sind die Scheiben nicht nur irgendwie oval, sondern sie sind wirkliche Ellipsen.
Daher bekommen meine meine Studis am letzten Semestertag bei mir "**Ellipsen-Salami**".

dandelin-zyl-beweis.pdf

Ellipsensalami und Sinuswurst Zu Kurvenheft Seite 52

Aufriss Ellipsensalami + Sinuswurst



$m = \frac{h}{r} = \frac{e}{r} \Rightarrow h = e$

$\left.\begin{array}{l} d^2 = e^2 + r^2 \\ a^2 = e^2 + r^2 \end{array}\right\} a = d$

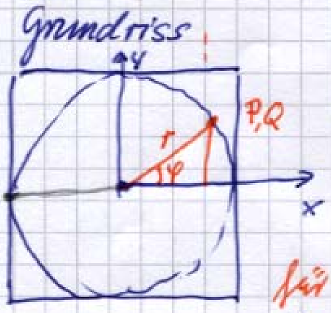
$a^2 = e^2 + r^2$

a Große Halbachse der Salami-Ellipse

$b := r$ kleine " " "

Schnittgerade $z = \frac{e}{r} x + k + e$

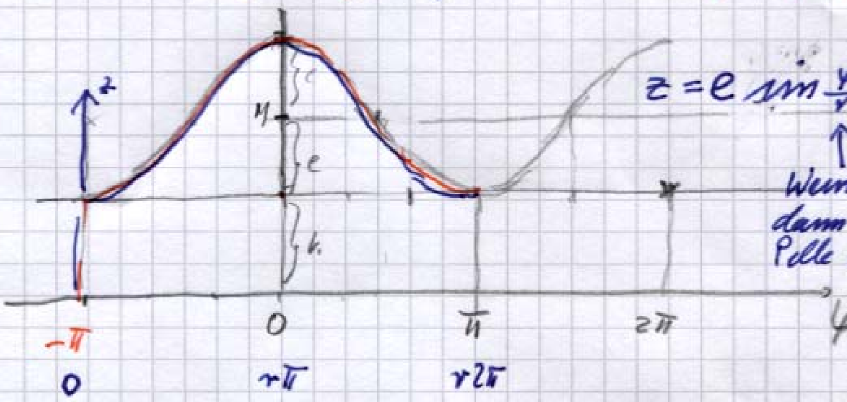
Grundriss



Kreis Parameterdarstellung

$\left.\begin{array}{l} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{array}\right\}$ für Q $z = k + e$

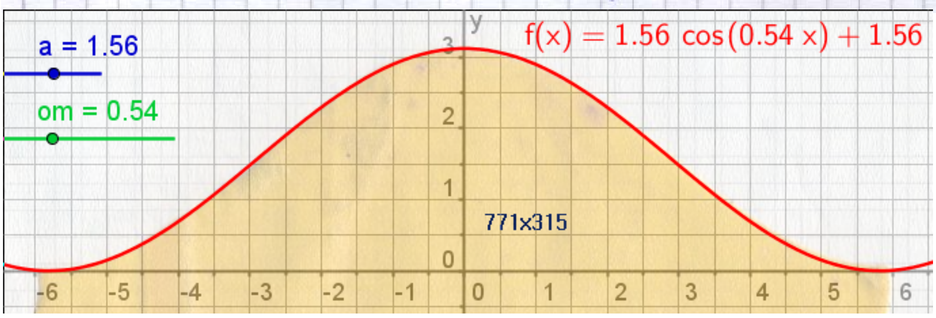
für P $\left\{\begin{array}{l} z = \frac{e}{r} x + k + e \\ z = \frac{e}{\cancel{r}} \cancel{r} \cos\varphi + k + e = e \cos\varphi + k + e \end{array}\right.$



$z = e \sin\frac{\varphi}{r} + k + e$

Wenn $\varphi = 2\pi r$ dann ist die Pelle abgewickelt.

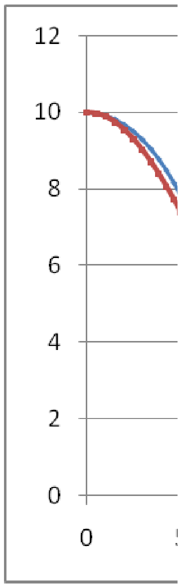
Winkel der Zylinderachse mit dem Normalenvektor der Ebene $\beta \Rightarrow \frac{e}{r} = \tan\beta$

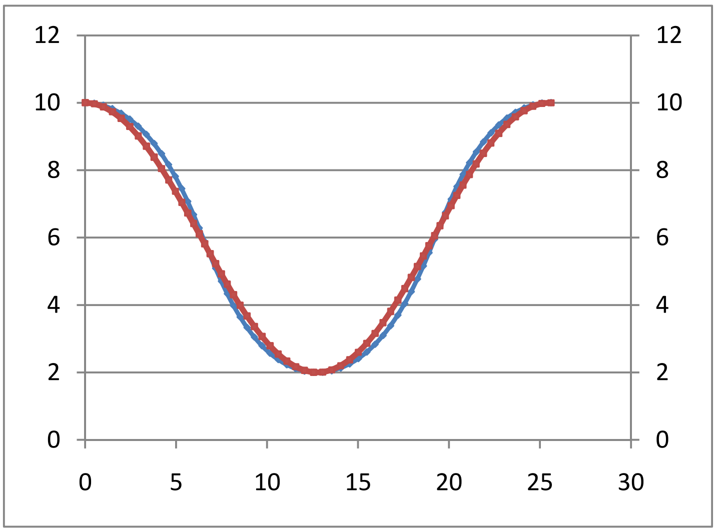


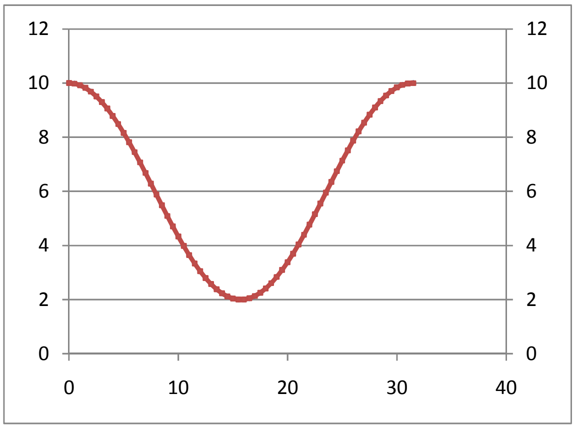
Mathematik, Zylinderschnitte

Elliptischer Zylinder, a,b, Schnitte und Abwicklungen, unten senkrecht zur Zylinderachse, oben schräg

a	b	c	L	h	Mitte Höhe h, zusätzliche Höhe c	L Ell
3	5	4	25,5318355	6		
delta phi	phi	delta s	s	z (blau)	sinus (rot)	
0,1	0	0	0	10	10	
	0,1	0,5	0,5	9,98001666	9,96975736	
	0,2	0,49840278	0,99840278	9,92026631	9,87986948	
	0,3	0,49364449	1,49204726	9,82134596	9,73337065	
	0,4	0,48582595	1,97787321	9,68424398	9,53544909	
	0,5	0,47511739	2,4529906	9,51033025	9,29304665	
	0,6	0,46176204	2,91475264	9,30134246	9,01433452	
	0,7	0,44608141	3,36083405	9,05936875	8,70811955	
	0,8	0,42848264	3,78931669	8,78682684	8,38323703	
	0,9	0,40946799	4,19878468	8,48643987	8,04798037	
	1	0,38964578	4,58843046	8,16120922	7,7096068	
	1,1	0,36974079	4,95817125	7,81438449	7,3739441	
	1,2	0,35059936	5,30877061	7,44943102	7,04511328	
	1,3	0,33317939	5,64195	7,06999531	6,72537723	
	1,4	0,31851044	5,96046043	6,67986857	6,41513169	







Elliptischer Zylinder, a,b, Schnitte und Abwicklungen, unten senkrecht zur Zylinderachse, oben schräg

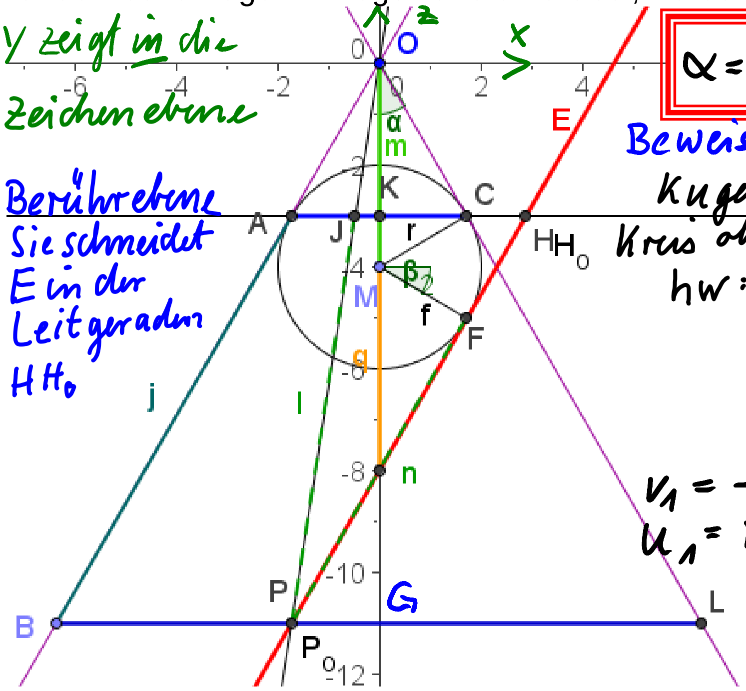
a	b	c	L	h	Mitte Höhe h, zusätzliche Höhe c
5	5	4	31,416	6	
delta phi	phi	delta s	s	z (blau)	sinus (rot)
0,1	0	0	0	10	10
	0,1	0,5	0,5	9,98001666	9,98001666
	0,2	0,5	1	9,92026631	9,92026631
	0,3	0,5	1,5	9,82134596	9,82134596
	0,4	0,5	2	9,68424398	9,68424398
	0,5	0,5	2,5	9,51033025	9,51033025

Gerader Kreiszylinder, schräg geschnitten ergibt genau Sinusabwicklung

Dandelinsche Kugel im Kegel für die Parabel, Berechnungen für die Zeichnung

y zeigt in die Zeichenebene

Berührebene
Sie schneidet E in der Leitgeraden HH_0



$\boxed{\alpha=\beta \Rightarrow \text{Kegelschnitt ist Parabel}}$

Beweis

Kugel oben $M=(0,0,-m)$

Kreis oben $\overline{OC} = m\cos\alpha$

$h_w := \overline{OK} = \overline{OC}\cdot\cos\alpha = m\cos^2\alpha$

$\overline{KC} = \overline{OC}\cdot\sin\alpha = m\sin\alpha\cos\alpha$

$r = m\sin\alpha$

Brennpunkt $F_1=(u_1,v_1)$

$v_1 = -m - r\sin\beta = -m - m\sin\alpha\sin\beta$

$u_1 = r\cos\beta = m\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha=\beta \Rightarrow u_1 = m\sin\alpha\cos\alpha$

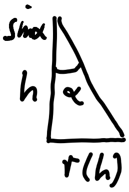
$v_1 = -m(1+\sin^2\alpha)$

Ebene Normalenvektor durch $\begin{pmatrix}0\\0\\-m-q\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-u_1\\0\\-v_1-m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\sin\alpha\cos\beta\\0\\m\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-\cos\beta\\0\\\sin\beta\end{pmatrix} =: \vec{n}$$

$$-\cos\beta\, x + \sin\beta\, z = -m(\sin\alpha+\sin\beta) = -2m\cdot\sin\alpha$$

Ein Punkt P auf Stange, Tiefe $-h$



$x = r(h)\cos t \qquad y = r(h)\sin t \qquad z=-h$

$x = h\tan\alpha\cos t \qquad y = h\tan\alpha\sin t \qquad z=-h$

liegt auf Ebene: $\alpha=\beta$, $-\cos\alpha\, h\tan\alpha\cos t - \sin\alpha\cdot h = -2m\sin\alpha \;|:\sin\alpha$

$-h(\cos t+1) = -2m$

$h = h(t) = \dfrac{2m}{\cos t+1}$

Parameterdarst. der Parabel

$$x_P = \frac{2m\tan\alpha\cos t}{\cos t+1} \qquad y_P = \frac{2m\tan\alpha\sin t}{\cos t+1} \qquad z_P = -\frac{2m}{\cos t+1},$$

Stange PJ oberer Pkt $x = m\sin\alpha\cos\alpha\cos t$, $y = m\sin\alpha\cos\alpha\sin t$, $z = -m\cos^2\alpha$

Länge $\overline{PF_1} = \overline{PJ}$ beides sind Tangentenabschnitte von P aus.

A, B in x-z Ebene $\quad A = \begin{pmatrix}-\overline{KC}\\0\\-h_w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\sin\alpha\cos\alpha\\0\\-m\cos^2\alpha\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}-h(t)\tan\alpha\\0\\-h(t)\end{pmatrix}$

$\overline{PJ} = \overline{AB}$ zwischen Kreisen

$H_0 = \begin{pmatrix}+\overline{KC}\\0\\-h_w\end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix}x_P\\0\\-h(t)\end{pmatrix}$

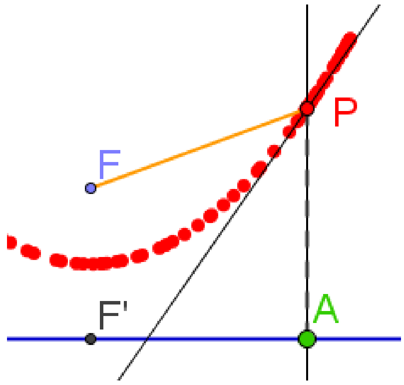
$\overline{AB} = \overline{H_0P_0}$ im Parallelogramm der x-z-Ebene

$H = \begin{pmatrix}+\overline{KC}\\y_P\\-h_w\end{pmatrix}$

$\overline{H_0P_0} = \overline{HP}$ Rechteck auf der Ebene E

$\Rightarrow \boxed{\overline{PF_1} = \overline{PH}}$ P ist vom Brennpunkt genau so weit entfernt wie von der Leitgeraden.

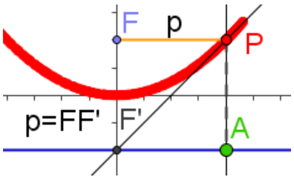
Parabel Definition mit der Leitgeraden

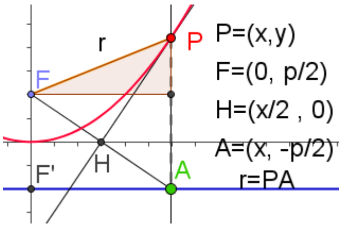


Konstruktionsbeschreibung

1. Gegeben ist eine "Leitgerade", hier waagerecht, und ein Punkt F außerhalb.
2. A ist ein beliebiger Punkt auf der Leitgeraden.
3. a ist die Mittelsenkrechte von FA.
4. a schneidet die Senkrechte in a auf die Leitgerade in P_A.
5. Die Parabel ist der geometrische Ort von, wenn sich A auf der Leitgeraden bewegt. (Ebenso ist hier noch P_B erzeugt.)

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt F und der Leitgeraden dieselbe Entfernung haben.

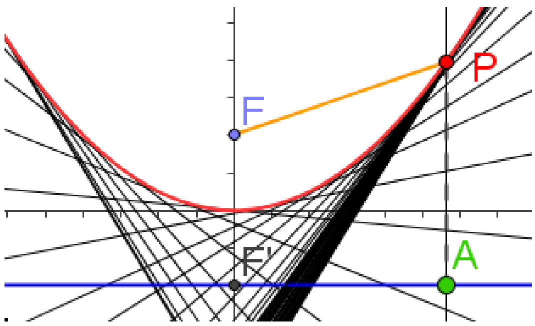




$$r^2 = x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2 \wedge r = y + \tfrac{p}{2}$$
$$(y + \tfrac{p}{2})^2 = x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2$$
$$2py = x^2 \iff y = \frac{1}{2p} x^2$$

Dass F die Ordinate p/2 hat, ist eine übliche Setzung. Aus dem Strahlensatz folgt dann, dass A die Ordinate –p/2 hat und H die halbe Abszisse von A. Damit ist die **Gleichung der Parabel** in der erwarteten Form hergeleitet.

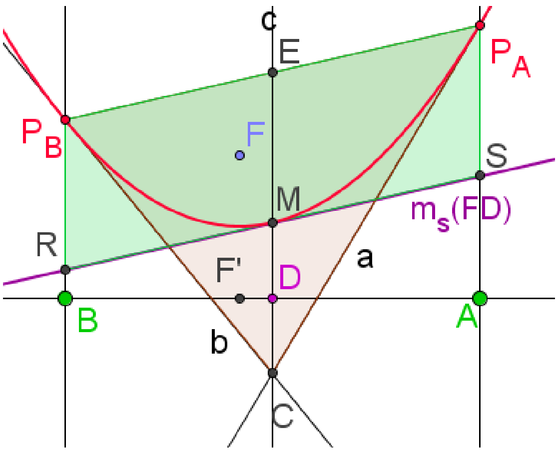
Gleichzeitig ist bewiesen, dass die Tangente die Steigung $y' = \frac{x^2}{2p} : \frac{x}{2} = \frac{x}{p}$ hat.



Verfolgt man die Spur von a, so sieht man:
Die Parabel ist die Hüllkurve aller Mittelsenkrechten a.

Führt man die Konstruktion noch für einen weiteren Leitgeradenpunkt B aus (sihe unten), so lassen sich noch andere wichtige Parabeleigenschaften herleiten: Das Dreieck AFB hat die beiden Tangenten als Mittelsenkrechten. Es hat noch eine weitere Mittelsenkrechte, nämlich die Senkrechte c durch C auf die Leitgerade. Sie verläuft durch die Mitte D von AB. Damit gilt:

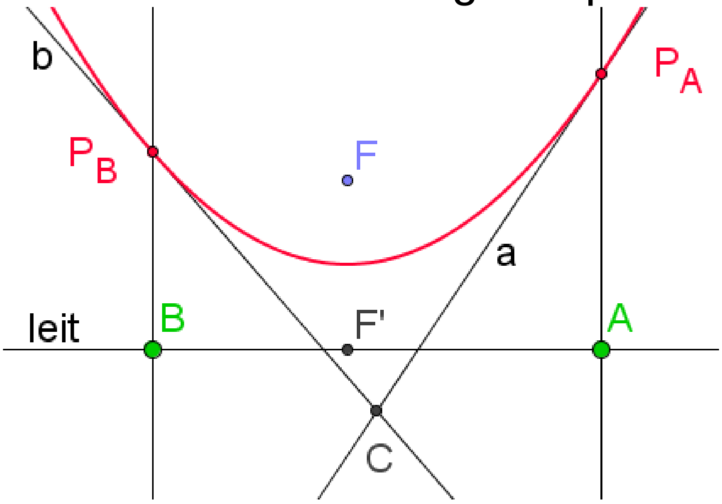
Zwei verschiedene Tangenten schneiden sich immer an der "Mittelstelle" zwischen den Berührstellen.



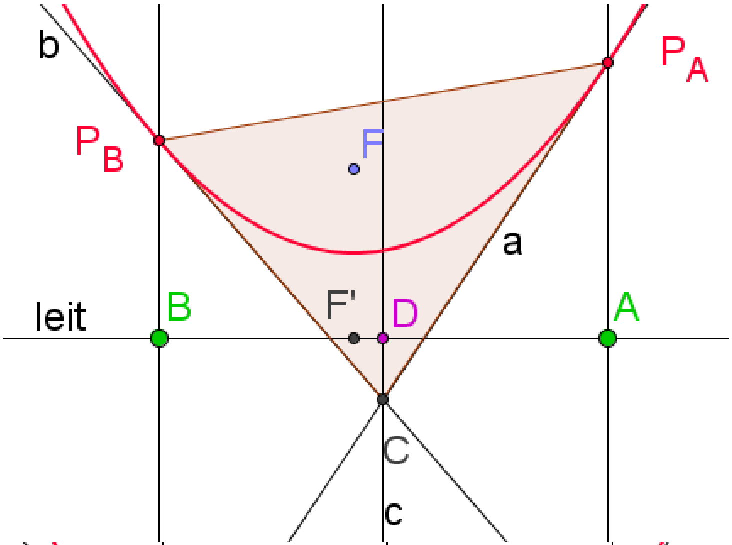
Die Mittelsenkrechte von FD schneidet c in M, M ist wegen FM=MD Parabelpunkt und $m_s(FD)$ ist Parabeltangente. Betrachten wir das Trapez RSP_AP_B .SP_A und MC sind gleichlang, denn die beiden Tagenten schneiden sich in der Mitte (s.o.) Ebenso sind MC und RP_B gleichlang. Und das Trapenz mit diesen beiden gesichert parallelen Seiten ist dann ein Parallelogramm, bei dem auch die beiden anderen Seiten parallel sind, d.h. die Sehne P_AP_B ist parallel zur Tangente $m_s(FD)$. Damit ist der **Bärenkasten**, d.h. RSP_AP_B elementargeometrisch nachgewiesen. **Speziell ist auch gezeigt, dass sie beiden Randtangenten die untere Kastenstrecke vierteln.**

parabel-leit-tangente.pdf

Parabel und ihre Tangente parallel zu einer Sehne

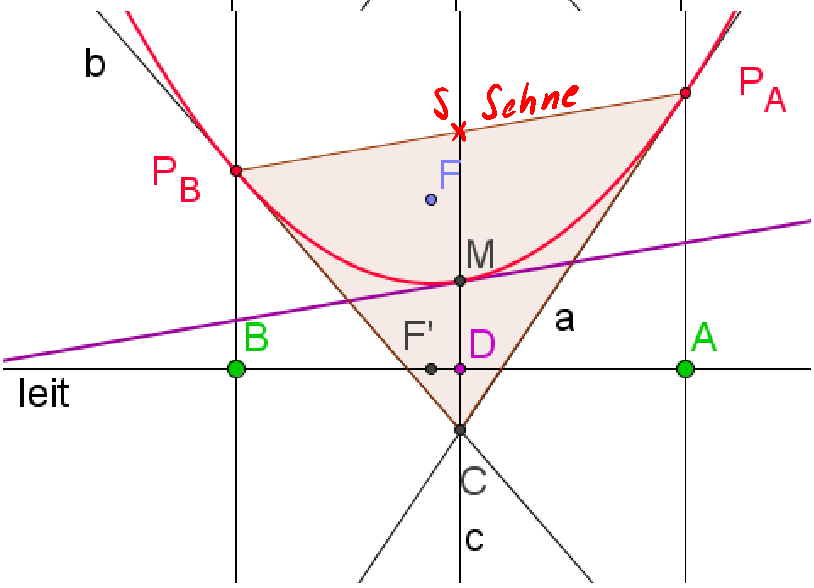


Gegeben ist ein Punkt F, der als Brennpunkt einer Parabel dienen soll. Weiter ist gegeben eine Leitgerade leit und auf ihr der Punkt F', Fußpunkt des Lotes von F auf leit.
A und B sind freie Punkte auf der Leitgeraden leit.
a und b sind die Mittelsenkrechten auf AF und BF. Sie schneiden die Senkrechten in A und B auf die Leitgerade in P_A und P_B.
Die Ortskurve eines solchen Punktes P ist bekanntlich eine Parabel mit dem Brennpunkt F und dem Parameter p=FF'.



Die beiden Mittelsenkrechten a und b schneiden sich in C.
C ist also auch auf der Mittelsenkrechten c von AB. c schneidet AB in D und D ist die Mitte von AB.

D liegt auf der Leitgeraden, die Mittelsenkrechte von FD ist also Tangente an die Parabel in ihrem Schnittpunkt M mit c.



Der Mittelpunkt S der Sehne liegt ebenfalls auf c.

Damit ist elementar* bewiesen:
Zu einer beliebiegen Sehne einer Parabel erhält man den Berührpunkt M der zu ihr parallelen Tangente, indem man eine zur Parabelachse parallele Gerade c durch S mit der Parabel schneidet. Die Tangenten in den Endpunkten der Sehne schneiden sich in C auf c.

Hiermit noch nicht bewiesen (aber richtig) ist, dass M die Strecke SC halbiert.

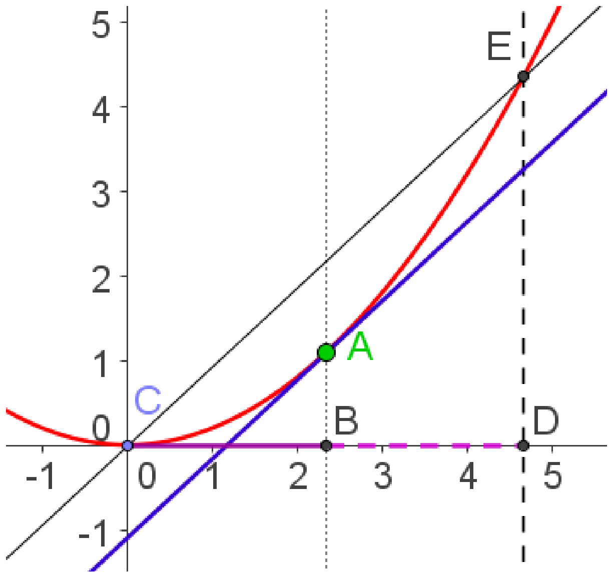
- "elementar" heißt hier: ohne Einsatz von Analysis, aber auch ohne Einsatz der "Scherung".
- Man kann die Figur so scheren, dass die Sehne sehkrecht zur Achse ist. Dann ist die Aussage trivial.

par-tang-sehne.pdf

Konstruktion eine Parabeltangente zu einem Parabelpunkt

Konstruktionsbeschreibung

1. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt A auf ihr.
2. B ist der Fußpunktes des Lotes von A ausf die x-Achse.
3. C ist der Ursprung und D ist der Spiegelpunkt von C an B.
4. Erzeuge E als Parabelpunkt an der Stelle von D.
5. Zeichne die Sehne CE und eine Parallele zu ihr durch A. Diese ist die gesuchte **Tangente.**



Beweise:
Je nach dem eingesetztem Vorwissen kann es verschiedene Beweise geben.

1) Elementare Bestätigung (kein Beweis im strengen Sinn): Erzeuge in GeoGebra oder einem anderen passenden Werkzeug die Tangente in A in der "Schnell-Version", tangente[A,f] heißt der Befehl in GeoGebra. Siehe dir an, dass in jeder Stellung von A die auf obige Art konstruierte Tangente mit der vom Werkzeug erzeugten Tangente übereinstimmt. Wenn du auch noch die Parabelöffnung variierst, kannst du ziemlich sicher sein, dass du wirklich die Tangente konstruiert hast. Für einen echten Beweis brauchst du mehr mathematisches Handwerkszeug, das du später lernst.

2) Beweis mit Methoden der **Analysis.**

$f(x) = y = ax^2 \qquad A=(x,y)$

$f'(x) = 2ax$

$f(2x) = a(2x)^2 = 4ax^2 \qquad E=(2x, 4ax^2)$

Steigung $CE = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4ax^2}{2x} = \underline{\underline{2ax = f'(x)}}$

3) Beweis mit Methoden der **Algebra**

$f(x) = y = ax^2 \qquad A=(x_0,y_0)$

$f(2x_0) = a(2x_0)^2 = 4ax_0^2 \qquad E=(2x/4ax_0^2)$

Steigung $CE = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4ax_0^2}{2x_0} = 2ax_0$

Parallele zu CE durch A $\quad y = 2ax_0(x-x_0)+y_0$

Schnitt der Parallelen mit der Parabel

$ax^2 = 2ax_0x - 2ax_0^2 + ax_0^2$

$ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = 0$

$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0$

$(x-x_0)^2 = 0$

doppelte Schnittstelle x_0

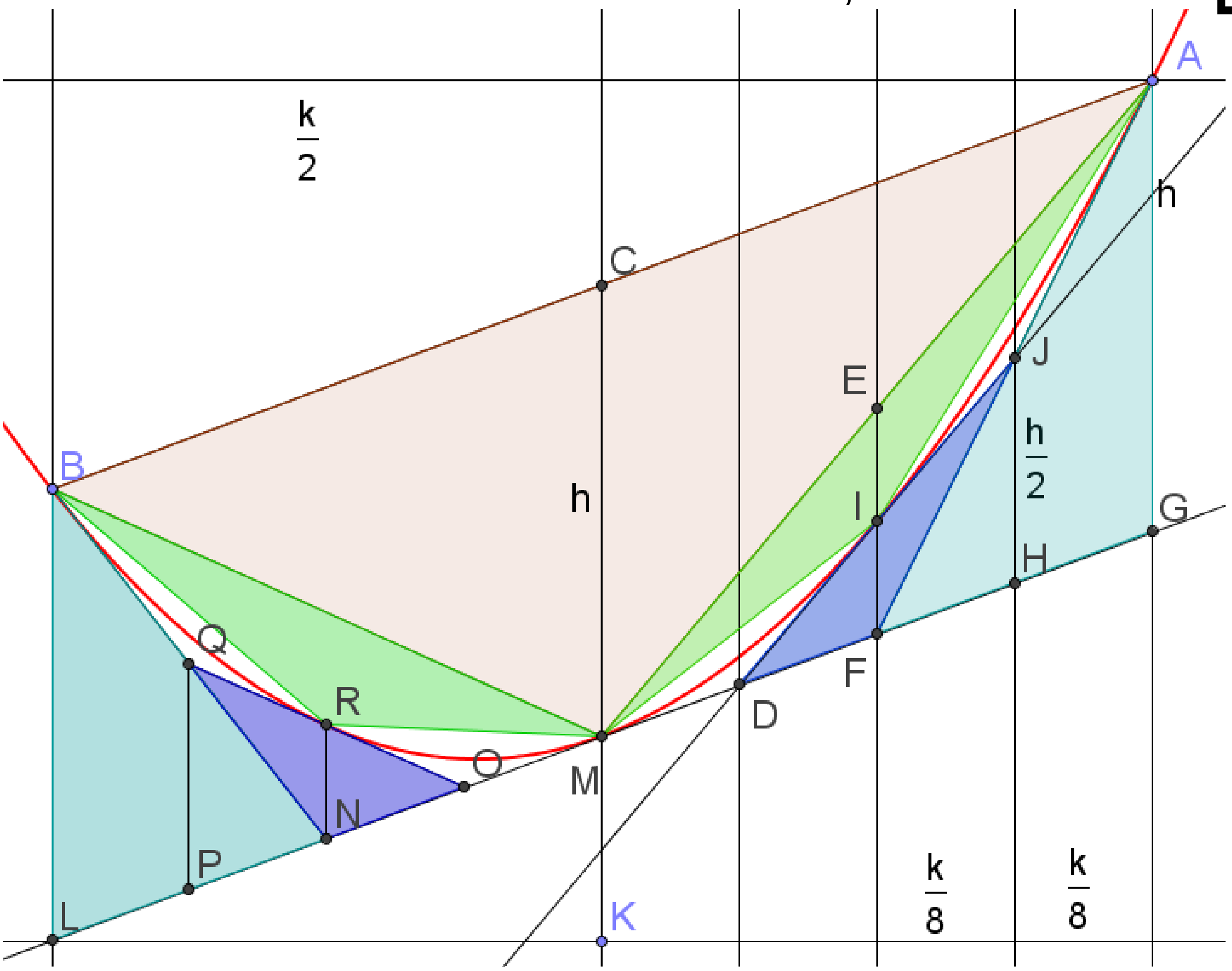
also Berührung

4) Beweis aus den Eigenschaften des "**Bärenkastens**" ist trivial, wenn man diesen kennt. Siehe www.mathematik-verstehen.de Bereich Analysis, Polynome im Affenkasten (Haftendorn)

5) Beweis durch **Scherung**: Schert man die Parabel an der y-Achse mit dem Steigungswinkel der Geraden CE, also so dass E auf die x-Achse fällt, dann bleibt die Parabel eine Parabel und A wird ihr Scheitel. Dann wird die konstruierte Parallele die Scheiteltangente und daher musste sie auch schon vorher Tangente sein. (Die Scherung ist eine einendeutige Abbildung.)

6.) Beweis durch Betrachtung der **Parabelkonstruktion** mit der Leitgeraden. Dazu mehr auf obiger Website unter algebraische Kurven, Kegelschnitte, Parabeln.

Parabel und Dreiecke nach Archimedes, Beweis



Es wurde für alle Parabeln schon gezeigt: Wenn C die Mitte der Sehne AB ist, dann ist die Tangente in M parallel zur Sehne. So entsteht das Parallelogramm ABLG. Es hat den Flächeninhalt kh. Die Worte "Flächeninhalt" und "Strecke" werden im Folgenden weggelassen.
Damit gilt Dreieck ABM=kh/2. Dieses ist das Bezugsdreieck von Archmedes.
Er schöpft die konvexe Parabelfläche von innen aus durch wiederholtes Ansetzen grüner Dreiecke und grenzt sie von außen ein durch die blauen Dreiecke.
Genauer: P,N,O,M,D,F,H achteln LG. Nach dem Strahlensatz ist damit HJ=PQ=FE=h/2 und FI=IE=NP=h/4. Damit gilt Dreieck EIA=EIM und MIA=2*1/2*h/4*k/4=kh/16 =MBR, also sind die grünen Dreicke zusammen kh/8 und damit ¼ so groß wie das Ausgangsdreieck ABM.
Es ergibt sich also eine geometrische Folge von Dreiecksflächen mit dem Faktor ¼ .

In moderner Schreibart heiß das: $Par \geq \frac{1}{2}kh \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{4}{3}$.

Als Eingrenzung von außen ergibt sich: FGA=1/2*k/4*h=kh/8=NLB. Der nächste Schritt liefert DFJ=FID+FIJ=2*1/2*h/4*k/8=kh/32 und das ist wieder ¼ des vorigen Dreiecks. Es ergibt sich also auch hier eine geometrische Folge von Dreiecksflächen mit dem Faktor ¼ . In moderner Schreibart heiß das: $Par \leq kh - 2 \cdot \left(\frac{1}{8}kh \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\right) = kh - \frac{1}{4}kh \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = kh - \frac{1}{4}kh \cdot \frac{4}{3} = kh \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{4}{3}$.

Vier Drittel des einbeschriebenen Dreiecks ergeben die Parabelfläche. In dem Parallelogramm nimmt die Parabelfläche zwei Drittel ein.

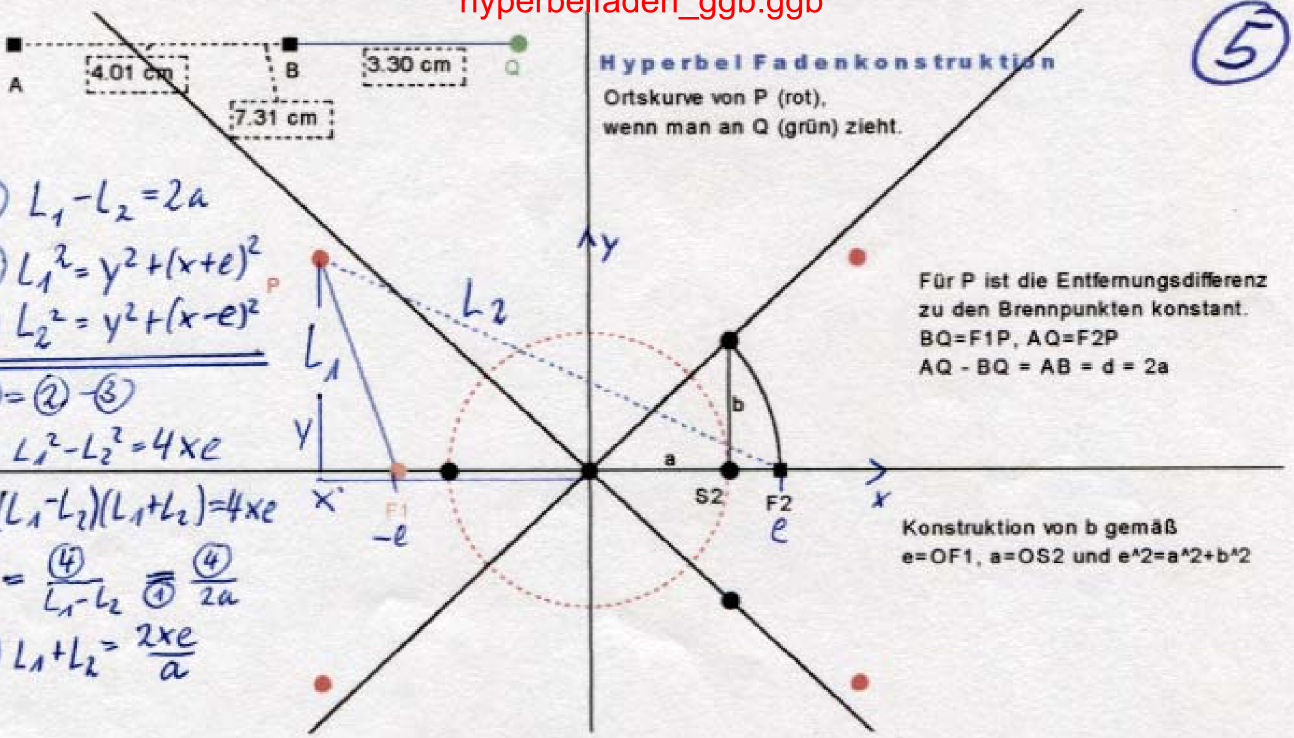
Archimedes hat die Grenzwerte natürlich nicht auf die moderne Art ausgerechnet. Er sah die Parabelfläche als "innere Dreicke plus ein Sandkorn" und als "von äußeren Dreiecken übrig gelassene Fläche minus ein Sandkorn".

hyperbelfaden_ggb.ggb

5

Hyperbel Fadenkonstruktion

Ortskurve von P (rot), wenn man an Q (grün) zieht.



Für P ist die Entfernungsdifferenz zu den Brennpunkten konstant.
BQ=F1P, AQ=F2P
AQ - BQ = AB = d = 2a

Konstruktion von b gemäß
e=OF1, a=OS2 und e^2=a^2+b^2

① $L_1 - L_2 = 2a$

② $L_1^2 = y^2 + (x+e)^2$

③ $L_2^2 = y^2 + (x-e)^2$

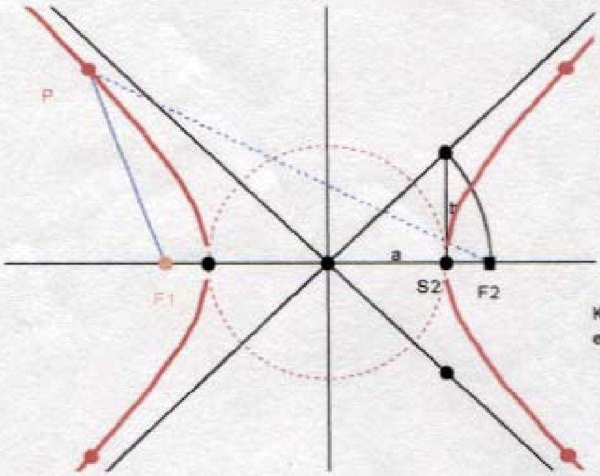
④ = ② − ③

④ $L_1^2 - L_2^2 = 4xe$

④ $(L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 4xe$

⑤ = $\frac{④}{L_1 - L_2} \overset{①}{=} \frac{④}{2a}$

⑤ $L_1 + L_2 = \frac{2xe}{a}$



Für P ist die Entfernungsdifferenz zu den Brennpunkten konstant.
BQ=F1P, AQ=F2P
AQ - BQ = AB = d = 2a

Konstruktion von b gemäß
e=OF1, a=OS2 und e^2=a^2+b^2

⑥ = (① + ⑤) : 2

⑥ $L_1 = a + \frac{xe}{a}$

⑥² $L_1^2 = a^2 + 2xe + \frac{x^2e^2}{a^2}$

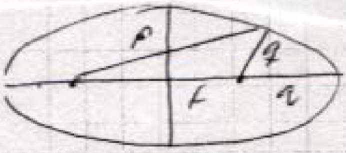
in ② $a^2 + \cancel{2xe} + \frac{x^2e^2}{a^2} = y^2 + x^2 + \cancel{2xe} + e^2$ ⑦

⑦ $a^2 - e^2 = x^2\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) + y^2$

$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2}$

mit $b^2 := e^2 - a^2$
$\iff e^2 = a^2 + b^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

4



$p + q = 2a$

$p^2 = y^2 + (x+f)^2$

$q^2 = y^2 + (x-f)^2$

$p^2 - q^2 = 4xf$

$p - q = \frac{2xf}{a}$

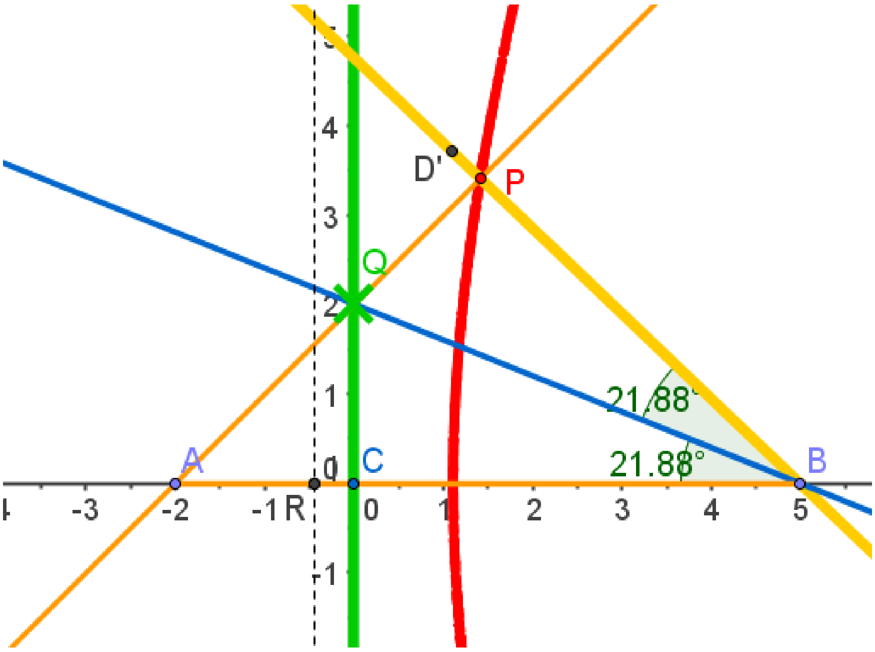
$p = a + \frac{xf}{a}$

$a^2 + 2xf + \frac{x^2f^2}{a^2} = y^2 + x^2 + 2xf + f^2$

$a^2 - f^2 = y^2 + x^2\left(1 - \frac{f^2}{a^2}\right)$

$1 = \frac{y^2}{a^2 - f^2} + \frac{x^2}{a^2}$

Kurven: Hyperbelzeichner



Gelenkkonstruktion einer Hyperbel

Spektrumlexikon, dort ist der obere Winkel bei B etwa doppelt so groß gezeichnet wie der untere. Beide Winkel müssen gleich sein.

Konstruktion:

Strecke AB fest, C auf Strecke AB. Q verschieblich auf Senkrechte in C auf AB. Winkel QBA als Winkel D'BQ antragen. P ist Schnittpunkt von AQ mit BD'.

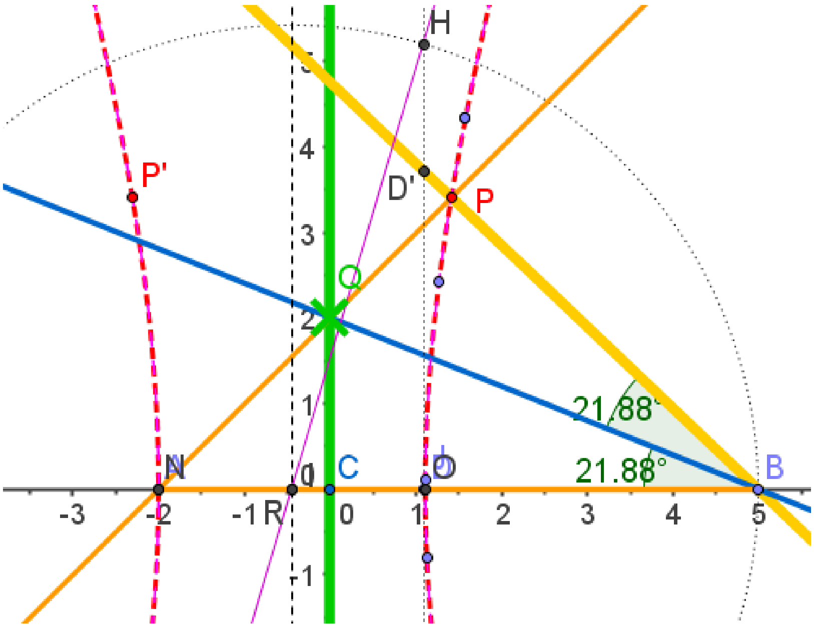
Die Ortslinie von P ist gesucht.

Behauptung:

P zeichnet eine Hyperbel

Anmerkungen:

1) Es ist zunächst nicht klar wo evt. der zweite Ast der Hyperbel sein könnte.
2) Zieht man Q so, dass BD' parallel AQ ist, merkt man, das die entsprechende Richtung die Richtung der Asymptoten sein muss.
3) Das Ortslinienwerkzeug liefert zwei Bögen, die eine Hyperbel sein könnten.
4) Mit fünf Punkten auf der Ortslinie kann man in GeoGebra eine echte Hyperbel erzeugen.
5) Mit deren Scheiteln N und O findet man den Mittelpunkt.
6) Mit einem Kreis um den Mittelpunkt durch B und einer Senkrechten im rechten Scheitel findet man einen sicheren Punkt einer Asymptote. Die Beobachtung 2) wird bestätigt.



Bemerkung:

Nach 2) kann man auch erst mit Nr. 6 experimentieren und den zweiten Ast durch eine Senkrechte im vermuteten Mittelpunkt erzeugen.

GeoGebra zeigt als Gleichung an:

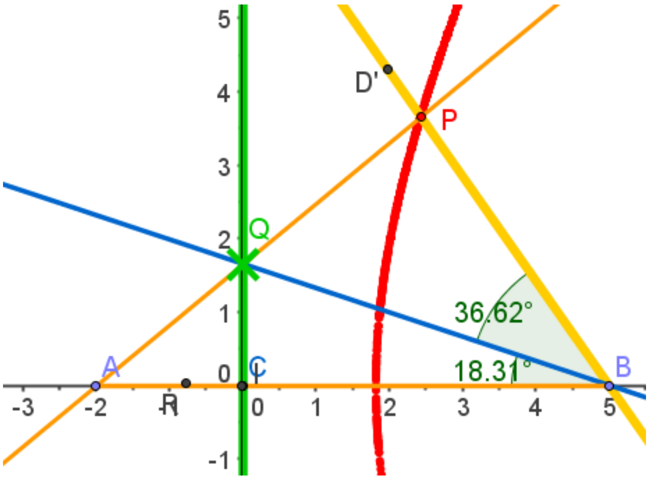
$$0.79x^2 - 0.07y^2 + 0.71x = 1.76$$

Mathematica liefert:

$$100 - 40x - 45x^2 + 4y^2 = 0$$

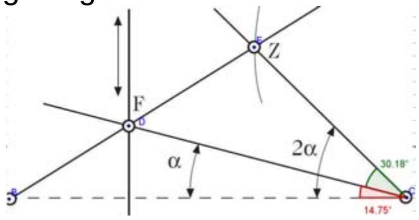
Die Formeln sind äquivalent.

Kurven: Möchtegern-Hyperbelzeichner



Gelenkkonstruktion einer ~~Hyperbel~~

Spektrumlexikon, dort ist der obere Winkel bei B doppelt so groß wie der untere gezeichnet. Wenn man annimmt, er sei fälschlich bis zur x-Achse gezeichnet, kommt man auf die hier gezeigte Konstruktion



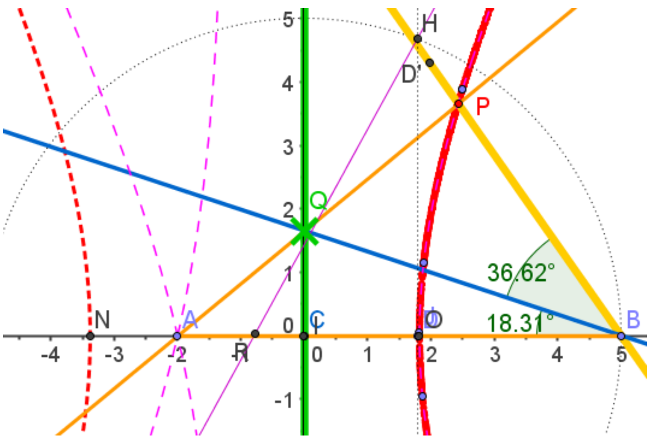
Konstruktion:
Strecke AB fest, C auf Strecke AB. Q verschieblich auf Senkrechte in C auf AB. Winkel QBA doppelt als Winkel D'BQ antragen. P ist Schnittpunkt von AQ mit BD'.
Die Ortslinie von P ist gesucht.

Eigentliche Behauptung war:

P zeichnet eine Hyperbel,__________ aber das ist nicht wahr!

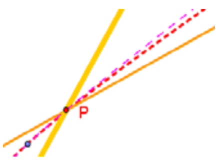
Anmerkungen:

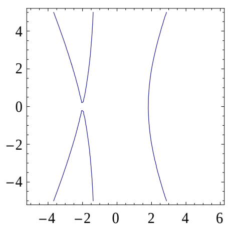
1) Es ist zunächst nicht klar wo evt. der zweite Ast der ~~Hyperbel~~ sein könnte.
2) Zieht man Q so, dass BD' parallel AQ ist, merkt man, das die entsprechende Richtung die Richtung der Asymptoten sein muss.
3) Das Ortslinienwerkzeug liefert den rechten Ast richtig, links aber zwei weitere Kurven irgendwie unklarer Herkunft zunächst.
4) Mit fünf Punkten auf der Ortslinie kann man in GeoGebra eine echte Hyperbel erzeugen.
5) Mit deren Scheiteln findet man der Mittelpunkt. Er ist im Bild unten auf die x-Achse gerückt worden.
6) Mit einem Kreis um den Mittelpunkt durch B und einer Senkrechten im rechten Scheitel findet man einen sicheren Punkt einer Asymptote. Die Beobachtung 2) wird bestätigt.



Bemerkung:
Nach 2) kann man auch erst mit Nr. 6 experimentieren und den zweiten Ast durch eine Senkrecht im vermuteten Mittelpunkt erzeugen.

Nun die Wahrheit:
Der Versuch, mit Mathematica zu der Gleich zu gelangen, zeigt, dass es sich um eine Kurve 3. Grades handelt und die von GeoGebra gezeigten drei Äste die wahre Ortskurve ergeben. Sie ist also keine Hyperbel. Links unten sieht man auch die Hyperbel und die Ortskurve auseinanderlaufen. Rechts daneben ist die Kurve $-y(2000+900x-600x^2-275x^3+80y^2+68xy^2=0)$





Diese wird also von der Gelenkkonstruktion erzeugt, wenn der obere Winkel doppelt so groß wie der untere ist.
$-y(2a^3b^3-3a^3b^2x+3a^2b^3x-6a^2b^2x^2-3ab^2x^3-b^3x^3+2a^3by^2+a^3xy^2+3a^2bxy^2)=0$ (keine Faktorisierung mehr!)

Traurige Ballade von den eifersüchtigen Kegeln

Es waren einmal zwei Kegel,
die liebten sich brüderlich;
sie saßen auf gleicher Achse
und küssten am Scheitel sich.
Da kam eine Eb`ne geflogen,
so glatt wie Ebenen sind;
es zog sie in seine Arme
der eine Kegel geschwind.

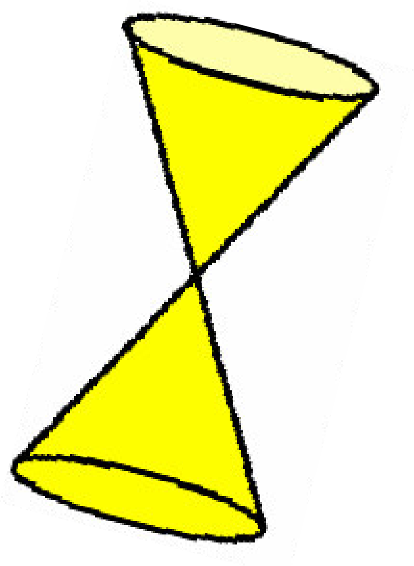
Parallel zu einer Seite
streckt` sie sich zärtlich her –
es freute sich der Parabel
der lustige Kegel sehr.
Doch leider dem Scheitelkegel
bedenklich die Sache schien;
es konnte die holde Eb`ne
ach, niemals schneiden ihn.

Er sprach zu ihr mit Schmeicheln:
„O komm` in meinen Arm!
Neig` dich zu mir, du Stolze!
Mein Mantel ist weich und warm.“
Die Ebene hörte es gerne,
sie war ein wenig kokett
und dachte, so eine Hyperbel,
die macht sich doch doppelt nett.

Nun schnitt sie die Kegel beide;
das ging so seine Zeit;
bald brachte die hitzigen Brüder
die Eifersucht in Streit.
Sie drückten an ihrer Achse,
zerstießen die Scheitel sich,
und an der betörten Eb`ne
rissen sie fürchterlich.

Die schrie: „Ach Unglücksel`ge!
Ihr dreht zu weit mich herum!
So werde ich zur Ellipse!
Das Endliche find ich so dumm.“
Die Kegel wollten nicht hören,
sie zerrten sie nach der Mitt`,
und kleiner wurde und kleiner
der schöne Kegelschnitt.

Und zwischen den wütenden Kegeln,-
o weh! Laut gellet ein Schrei –
die Ebene geht durch den Scheitel,
da war`s mit dem Schneiden vorbei.
Zwei zerrissene Kegelmäntel,
auf ewig beide getrennt,
und ein verschrumpeltes Pünktchen –
dass war das grausige End`!

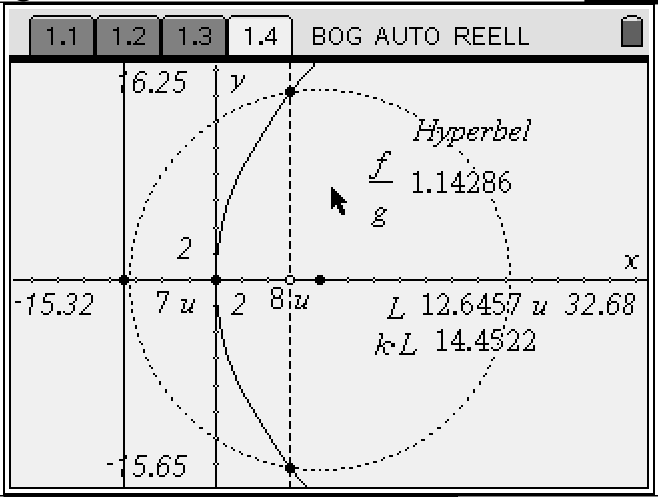


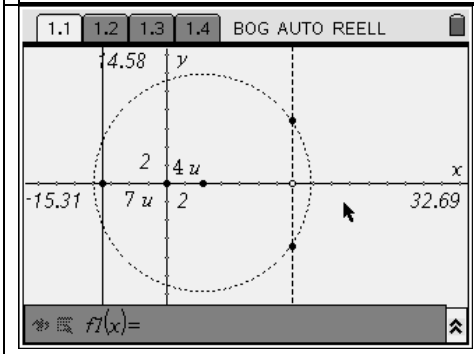
Gedichtet von Kurd Lasswitz zum Stiftungsheft des Mathematischen Vereins an der Universität Breslau, 1880

Quelle: Barth, Krumbacher, Barth. ***Kegelschnitte – Wahlpflichtgebiet für die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildungsrichtung***. München: Ehrenwirth.

Leitgeradenkonstruktion aller Kegelschnitte

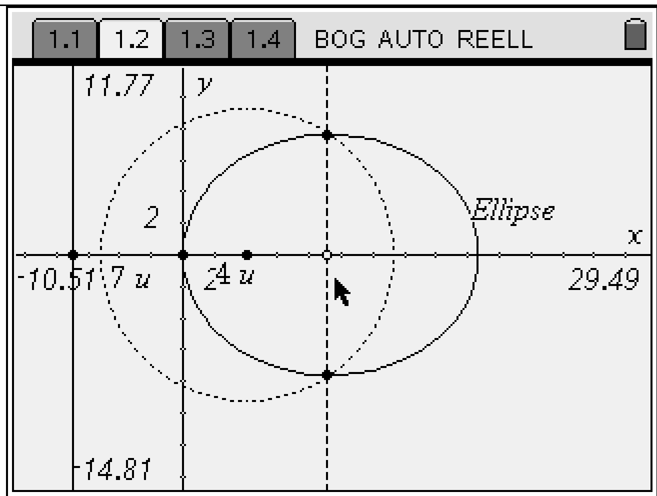
1. Setze Leitgerade G=(-7,0)
2. Setze F=(8,0)
3. Setze Q=(beliebig,0) (offener Kreis)
4. Senkrechte(Q,x-Achse)
5. Messen f=OF, g=GO
6. Text f/g
7. Markieren f/g , Menu 1/7 a+b
8. Markieren Buchstabe f , dann markieren Zahl f, also die 8u (u=unit)
9. Markieren Buchstabe g, dann Zahl g
10. Die entstandene Zahl neben f/g setzen. Dieses ist k.
11. Messen L =GQ
12. Wie von 7 bis 10 jetzt auch k*L berechnen.
13. Menu 9/7 Zirkel, Zahl k*L klicken
14. An der Maus hängt der Mittelpunkt des passenden Kreise, setze diesen auf F
15. Er schneidet die Senkrechte aus 4. in P.
16. Geometriespur auf P, Ziehen an Q.
17. dann Menu 9/6 Ortslinie, P klicken, dann Q.





Bei diesem Bild von der Ellipse war alles so, wie oben bei der Hyperbel, nur sind die Beschriftungen vom PC leider nicht transportiert worden. Sie standen wohl weiter außen als bei der Hyperbel. Das kleine Bild zeigt die Vorstufe ohne die Ortskurve.

Bei der Ellipse ist k<1, d.h. F liegt dichter am Ursprung als die Leitgerade.

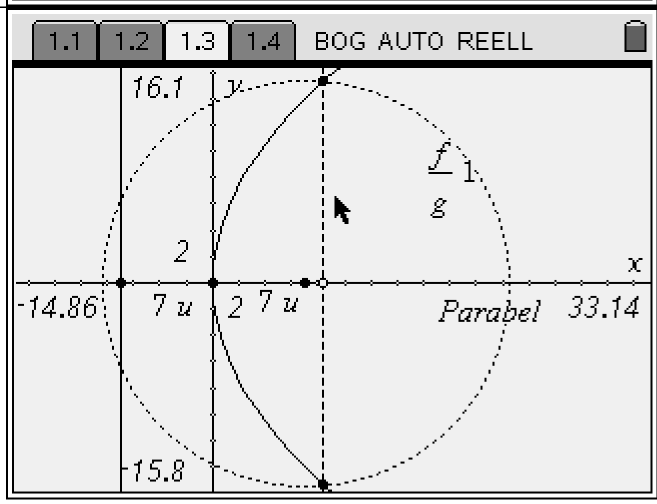


Bei der Parabel ist k=1.

Bemerkung: Leider wurde auch das Seitenverhältnis nicht richtig übertragen vom PC zum TI. Da musste man mit Zoom Grundeinstellung oder Standard und weiterem herauszommen die Kreise wieder erzwingen oder mit Umschlt+Ziehen die Achse stauchen.

Eine Rettung wäre auch, die Konstrktion im Modus "Ebenengeometrie" zu machen.

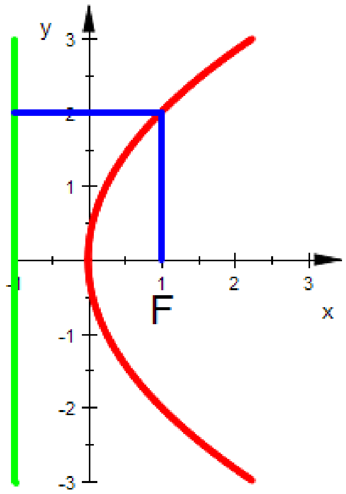
Fazit: Vorsicht! PC und TI-Dateien sind nicht identisch. Daher hänge ich bei TI-optimierten Dateien nun –ti an den Namen.



leitgerade-alle-ti.pdf

Aufgabe 2 Kegelschnitte

Allgemeine Scheitelgleichung $y^2 = 2px - \left(1-\varepsilon^2\right) x^2$



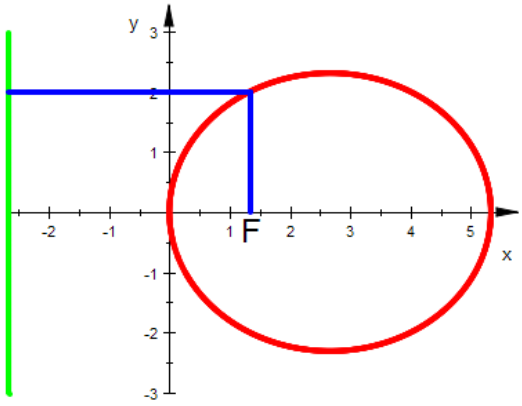
a) Parabel

i. Demonstrieren Sie mit dem Parabelpunkt für x=2 die Leitgeradendefinition der Parabel.

ii. Demonstrieren Sie mit demselben Punkt die Namensgebung der Parabel.

iii. Für welches ε entsteht eine Parabel aus der allgemeinen Scheitelgleichung, wie groß ist hier p und wie erklärt sich ii.) an der Gleichung.

b) Ellipse



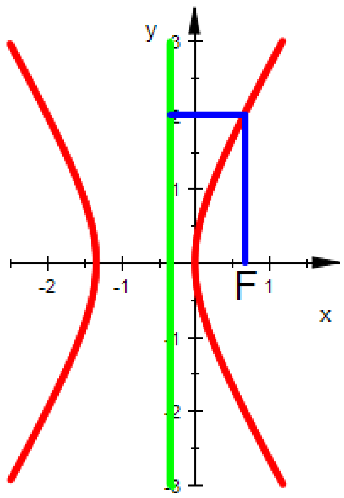
i. Demonstrieren Sie mit dem Ellipsenpunkt über F die Leitgeradendefinition der Ellipse. Entnehmen Sie ε der Zeichnung.

ii. Demonstrieren Sie mit dem Punkt für x=4,5 die Namensgebung der Ellipse.

iii. Für welche ε entstehen Ellipsen aus der allgemeinen Scheitelgleichung, wie groß ist hier p und wie erklärt sich ii.) an der Gleichung.

iv. Hier gilt $a = \frac{8}{3}$ und $b = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Stellen Sie die verschobene Mittelpunktsgleichung auf und zeigen Sie durch Umformungen, dass die erwartete Scheitelgleichung gilt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen p, ε und a, b?

c) Hyperbel



i. Demonstrieren Sie mit dem Hyperbelpunkt über F die Leitgeradendefinition der Hyperbel. Entnehmen Sie ε der Zeichnung.

ii. Demonstrieren Sie mit dem Punkt für x=1 die Namensgebung der Hyperbel.

iii. Geben Sie mit den abgelesenen Werten für p und ε die Scheitelgleichung dieser Hyperbel an.

Kegelschnitt-Befehle in GeoGebra (Version 4 Mai 2012)

Ellipse
Hyperbel
Parabel

Kegelschnitt durch fünf Punkte

Kegelschnitt (Befehle)

Im Moment gibt es folgende Kegelschnitt Befehle:

- Achsen
- Asymptote
- Brennpunkt
- Brennweite
- Ellipse
- Exzentrizität
- HalbeHauptachsenlänge
- HalbeNebenachsenlänge
- Halbkreis
- Hauptachse
- Hyperbel
- Kegelschnitt
- KonjugierterDurchmesser
- Kreis
- Leitlinie
- Mittelpunkt
- Nebenachse
- Parabel
- Parameter
- Polare

Siehe auch Werkzeuge für Kegelschnitte

Achsen (Befehl)

Achsen [Kegelschnitt]
Zeichnet die Haupt- und die Nebenachse des Kegelschnittes ein.

Asymptote (Befehl)

Asymptote [Kegelschnitt]
Liefert beide Asymptoten des Kegelschnittes.

Asymptote [Funktion]
Liefert eine Liste aller Asymptoten der Funktion.

Asymptote [Implizite Kurve]
Liefert eine Liste aller Asymptoten der Impliziten Kurve.

Brennpunkt (Befehl)

Brennpunkt[<Kegelschnitt>]
Liefert alle Brennpunkte des Kegelschnittes.

Brennweite (Befehl)

Brennweite[<Kegelschnitt>]
Berechnet die Brennweite des Kegelschnittes.

Hinweis: Die Brennweite ist der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Kegelschnittes und seinem Brennpunkt (oder zu einem von zwei Brennpunkten)

Exzentrizität (Befehl)

Exzentrizität[Kegelschnitt]
Berechnet die Exzentrizität des Kegelschnittes.

Mittelpunkt[<Kegelschnitt>]
Bestimmt den Mittelpunkt des angegebenen Kegelschnittes.

Ellipse (Befehl)

Ellipse[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Halbachsenlänge>]
Erstellt eine Ellipse mit den zwei gegebenen Brennpunkten und der angegebenen Halbachsenlänge.

Ellipse[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Strecke>]
Erstellt eine Ellipse mit den zwei gegebenen Brennpunkten und verwendet als Halbachsenlänge die Länge der angegebenen Strecke.

Ellipse[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Punkt>]
Erstellt eine Ellipse mit den zwei gegebenen Brennpunkten, die außerdem durch den gegebenen Punkt verläuft.

Hinweis: Siehe auch Ellipsen-Werkzeug .

Hyperbel (Befehl)

Hyperbel[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Halbachsenlänge>]
Erstellt eine Hyperbel zu den zwei gegebenen Brennpunkten und der angegebenen Halbachsenlänge.

Hinweis: Bedingung: *0 < 2*Halbachsenlänge < Abstand der Brennpunkte*

Hyperbel[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Strecke>]
Erstellt eine Hyperbel zu den zwei gegebenen Brennpunkten und verwendet als Halbachsenlänge die Länge der angegebenen Strecke.

Hyperbel[<Brennpunkt>, <Brennpunkt>, <Punkt>]
Erstellt eine Hyperbel zu den zwei gegebenen Brennpunkten, die durch den angegebenen Punkt verläuft.

Hinweis: Siehe auch Hyperbel-Werkzeug .

Parabel (Befehl)

Parabel[Brennpunkt F, Leitlinie g]
Erzeugt eine Parabel mit Brennpunkt *F* und Leitlinie *g*.

Hinweis: siehe auch Werkzeug Parabel

Parameter (Befehl)

Parameter[Parabel]
Berechnet den Parameter der Parabel, welcher dem Abstand zwischen der Lei und dem Brennpunkt entspricht.

Leitlinie (Befehl)

Leitlinie[<Parabel>]
Zeichnet die Leitlinie zur gegebenen Parabel ein.

Polare (Befehl)

Polare[Punkt, Kegelschnitt]
Erzeugt die Polare des Kegelschnitts zum gegebenen Punkt.

Hinweis: Siehe auch Werkzeug Polare oder konjugierter Durchmesser.

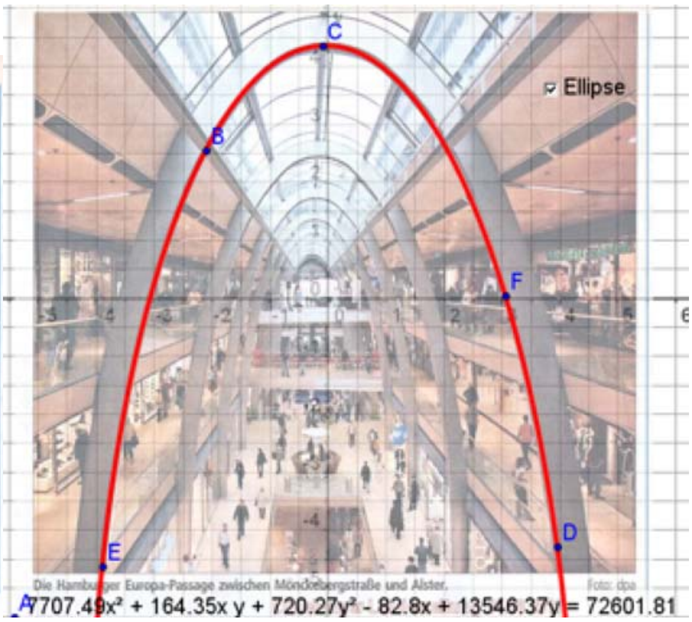
Ellipse Moenkebergpassage

ellipse-moenckeberg.pdf

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4 Juli 07   Update 5.8.2011

Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de   www.mathematik-verstehen.de

##



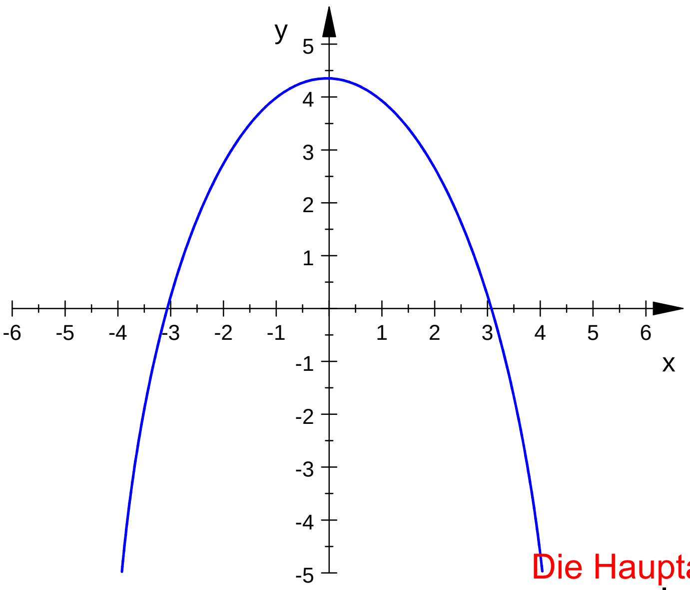
----

c: 7707.49x² + 164.35x y + 720.27y² - 82.8x + 13546.37y = 72601.81

```
keg:=matrix([[7707.49*x^2 + 164.35*x *y + 720.27*y^2 -
82.8*x + 13546.37*y - 72601.81]])
```

$$\left(7707.49 \cdot x^2 + 164.35 \cdot x \cdot y - 82.8 \cdot x + 720.27 \cdot y^2 + 13546.37 \cdot y - 72601.81 \right)$$

```
kegp:=plot::Implicit2d(keg[1]=0,x=-6..6,y=-5..5):
plot(kegp,Scaling=Constrained):
```



Die Hauptachsentrafo ist bei Linearer Algebra.

In der Datei sind es 9 Seiten.

Dieser Kegelschnitt ist offenbar eine Ellipse.

Durchführung einer Hauptachsentransformation

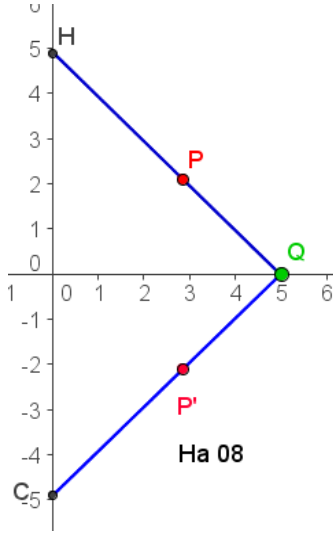
Lichtkegel

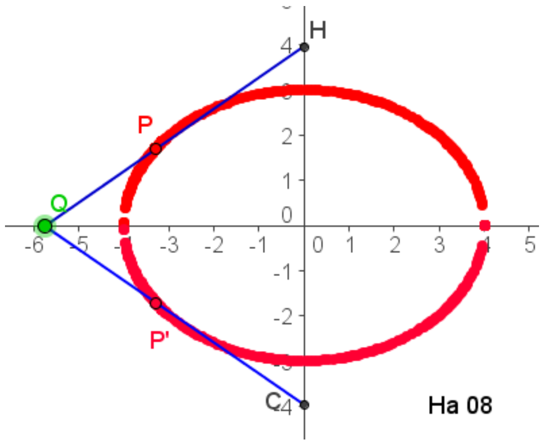
lichtkegelbilder.pdf

Ellipse Stangenkonstruktion und Astroide auch „rutschende Leiter“

Einkleidung:
An einer Hauswand lehnt eine Leiter der Länge L, die an der Wand herunterrutscht.
Welchen Weg bescheibt der Punkt P, der die Leiter im Verhältnis a:b teilt? Welche Punkte werden überhaupt von der Leiter getroffen.

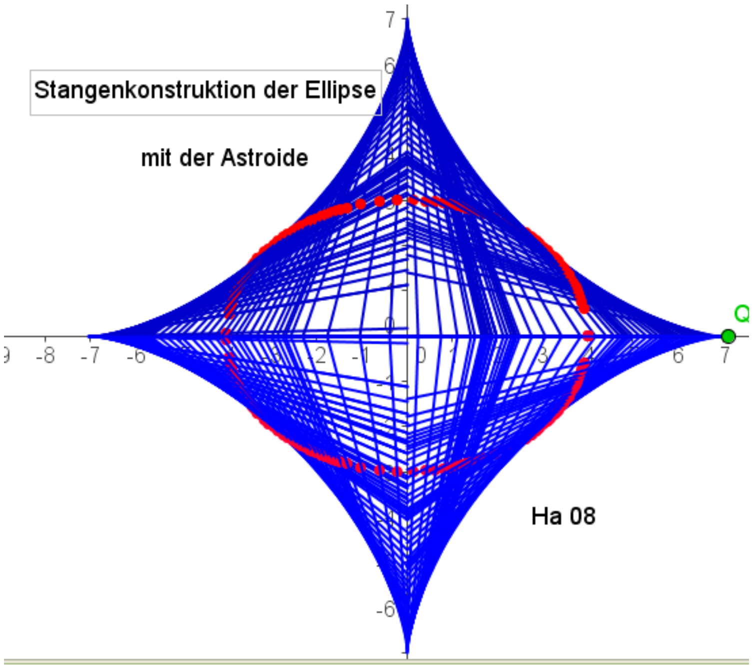
Strecke HP=a Strecke PQ=b
Q beweglich auf der x-Achse.





Ortskurve von P scheint eine
Ellipse zu sein. Die Halbachse wären dann a und b.

Beweisen Sie dies.



Die Hüllkurve ist eine Astroide.

Sie hat die Gleichung

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$$

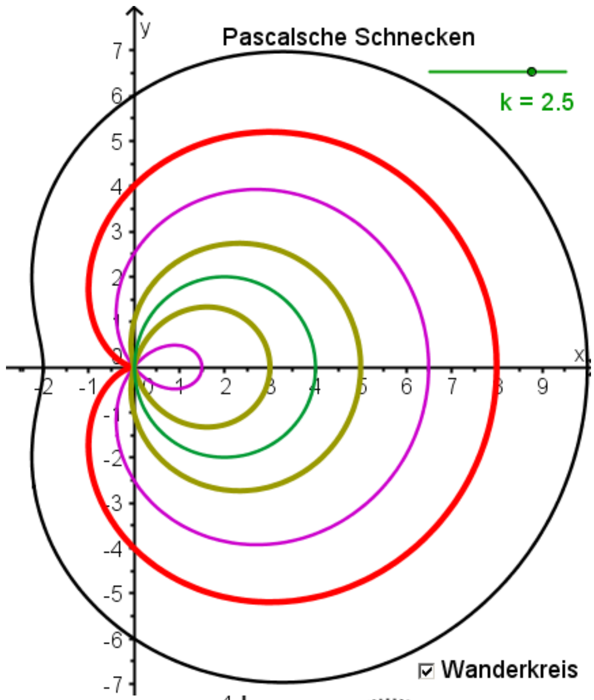
Algebraische Gleichung

$$x^6 + 3x^4\left(y^2 - 1\right) + 3x^2\left(y^4 + 7y^2 + 1\right) = 1 - y^6 + 3y^4 - 3y^2$$

Diese Gleichung entsteht, wenn man in der obigen Gleichung die Wurzeln beseitigt.

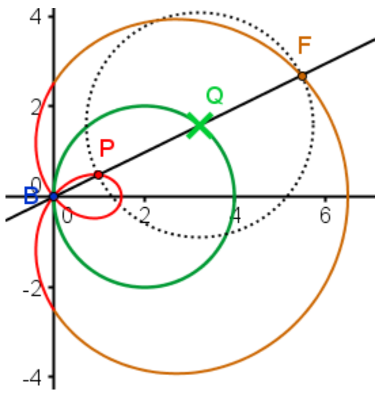
Wenn Sie Analysis können, dann ist diese Gleichung herzuleiten.

Pascalsche Schnecken



Diese Kurven gehen auf Étienne Pascal zurück, den Vater des berühmteren Sohnes Blaise Pascal.
Sie gehören zu den Konchoiden.
Bei diesen kann man sich vorstellen, Herrchen (Punkt Q) wandere auf einer Straße und sein Hund strebe an einer Leine fester Länge k einem Baum zu oder von dem Baum weg.

Bei den Pascalschen Schnecken ist dieser Wanderweg ein Kreis, auf dessen Rand der Baum steht.
Bei der Hundekurve (Kurvenheft Seite 7) war die Straße eine Gerade und der Baum stand außerhalb.



Es gibt wie bei der Hundekurve Formen mit Schlaufe, mit Spitze und mit Delle. Im obigen Bild ist der für alle Kurven gemeinsame Wanderkreis grün und hat den Radius R=2. Die Leinenlänge k ist variiert.
Rechts ist die geometrische Konstruktion zu sehen.
Ersichtlich ist k>2.

Alle Konchoiden haben die Polargleichung
$r(\theta) = weg(\theta) \pm k$, wenn der Baum im Ursprung ist. Dabei wird von dem Polarradius von Q auf dem Weg die Leinenlänge addiert oder subtrahiert.

Der so wie oben gelegene Wanderkreis hat die Polargleichung
$weg(\theta) = 2R\cos(\theta)$ wie man sich leicht klar macht.
Damit haben die Pascalschen Schnecken die Polargleichung

$$\boxed{r(\theta) = 2R\cos(\theta) \pm k}$$

Herleitung einer kartesischen Gleichung (sieh Seite 6): $x = r\cos(\theta)$, also

$$r = 2R\,\frac{x}{r} \pm k \quad \Leftrightarrow r^2 = 2Rx \pm kr \quad \Leftrightarrow r^2 - 2Rx = \pm kr \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2Rx = \pm kr$$

Also ist $\boxed{\left(x^2 + y^2 - 2Rx\right)^2 = k^2\left(x^2 + y^2\right)}$ eine implizite Gleichung der Pascalschen Schnecken.

Anmerkung: Auf Seite 2 steht $-a\,y$ anstelle von $-2Rx$. Damit ist dort a der Durchmesser des Wanderkreises und dessen Mittelpunkt ist auf der y-Achse.
In der GeoGebra-Datei sind in beiden Grafik-Ansichten die beiden Bilder aufeinander bezogen.

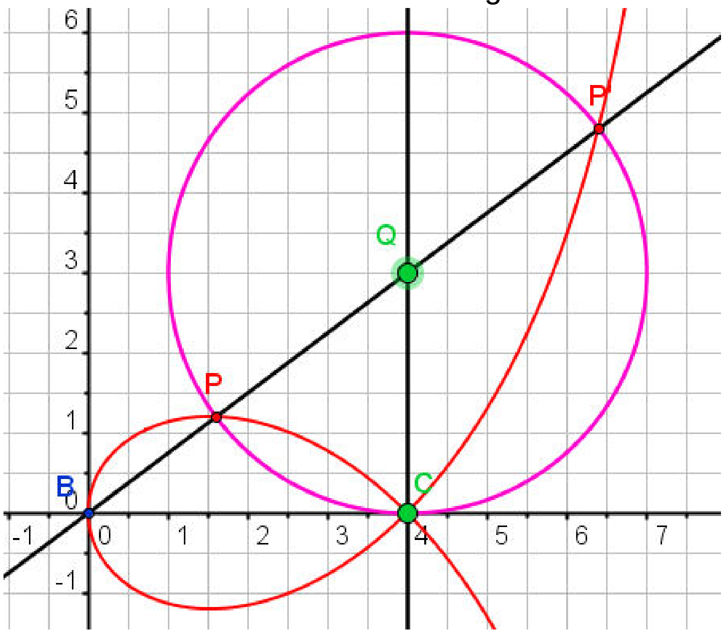
Die Drei ??? -Strophoiden

3. Februar 1998

Die Strophoide hat interessante mathematische Eigenschaften. Sie kommt in so vielen Zusammenhängen vor, dass sie viele Namen hat: Pteroide torricellanea (Flügelkurve, Torricelli hat sie 1645 untersucht), Fokale (weil sie mit den Brennpunkten von Kegelschnitten zu tun hat), Kukumaeide, Logocyclica, harmonische Kurve, u.s.w.. Der Name Strophoide kommt von griech. strophos = Seil, Band. und wurde 1846 von Montucci eingeführt.

Konstruktion 1

Auf BC ist in C die Senkrechte g errichtet. Der Kreis um Q auf g mit dem Radius AC schneidet BQ in P. Gesucht ist der geometrische Ort von P, wenn Q auf g wandert.



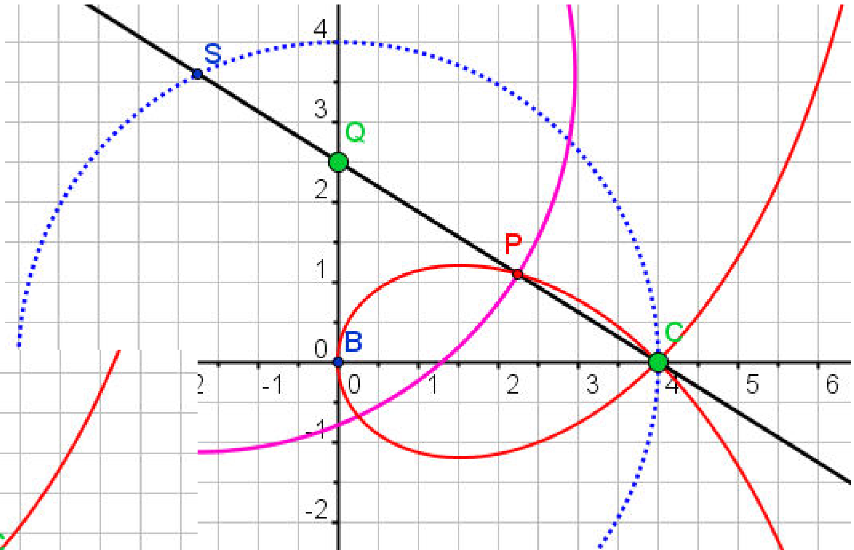
Konstruktion 2 (Weth)

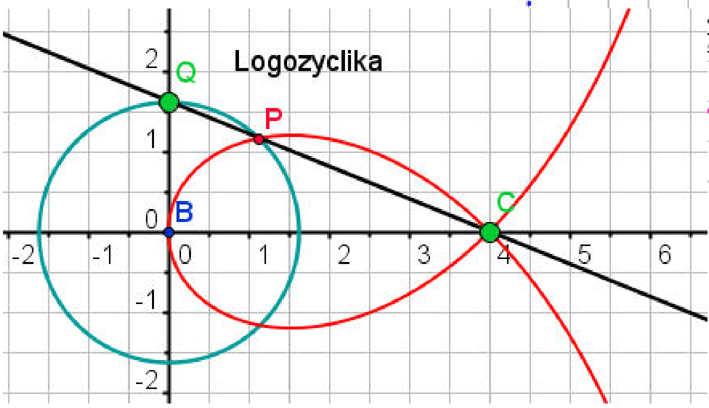
Auf BC ist in B die Senkrechte h errichtet und um B ein Kreis mit dem Radius BC geschlagen. Q liegt auf der Senkrechten. QC schneidet den Kreis in S. Trägt man von S aus die Strecke OC auf der Geraden OC ab, so entsteht P.
Gesucht ist der geometrische Ort von

P, wenn Q auf h wandert

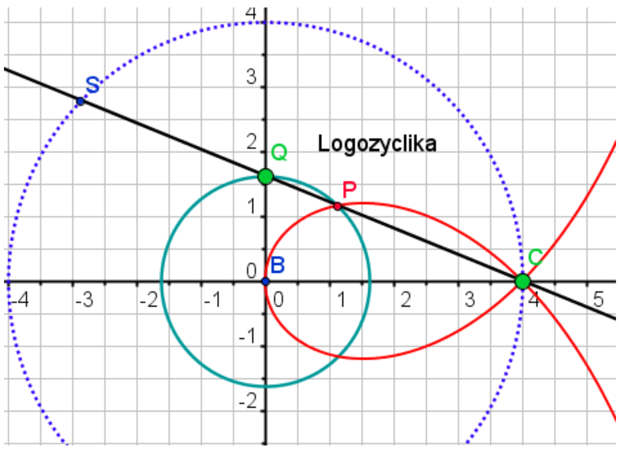
Konstruktion 3

Auf BC ist in B die Senkrechte errichtet, Q liegt auf der Senkrechten. Der Kreis um B mit dem Radius BQ schneidet QC in P. Gesucht ist der geometrische Ort von P, wenn Q auf h wandert.





Wie könnte man die Gleichheit der drei Kurven nachweisen? Eine Idee liefert das gemeinsame Zeichnen.
Die zugehörigen GeoGebra-Dateien zeigen auch Konstruktion 1 und 3 zusammen.



Parameterdarstellung $x = a\ (1 - \sin\varphi);\quad y = a\ \tan\varphi\ (1 - \sin\varphi)$

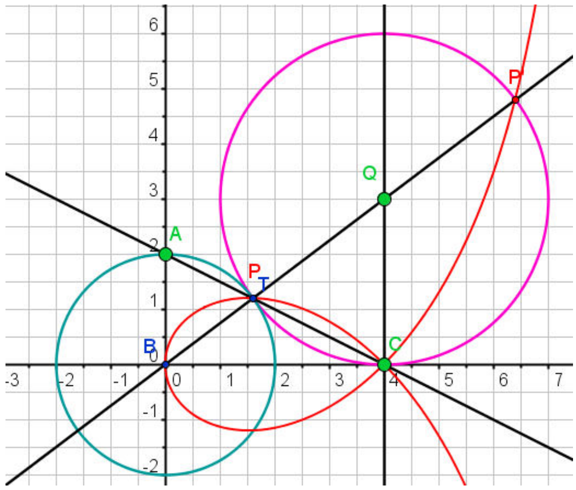
Weitere Gleichungen auf der Seite strophoide.pdf.

strophoide-3-konstruktionen.docx

Die Drei ??? -Strophoiden Lösungen

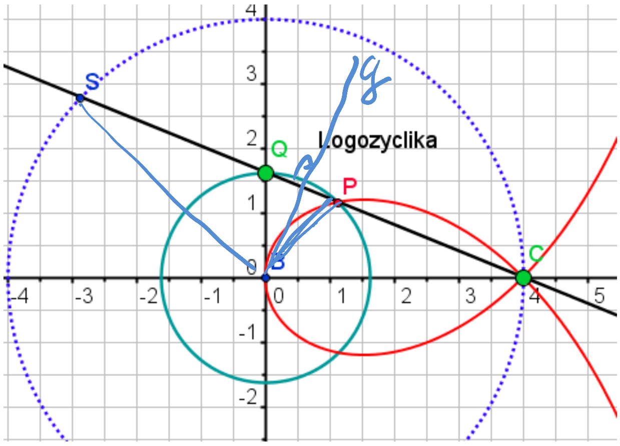
Zu zeigen ist, dass alle **drei Konstruktionen dieselbe Kurve** ergeben.

Den Nachweis kann man rein geometrisch führen. Man könnte auch für alle drei kartesische Gleichungen herleiten und diese vergleichen, ebenso könnte man drei Polargleichungen herleiten und diese vergleichen. Eine!!!! dieser drei Taten ist ein vollständiger Beweis.



Geometrischer Beweis K1 vs K3

In K1 wird die Gerade PC eingezeichnet. Sie erzeugt auf der y-Achse A (das Q aus K3) Da das Dreieck PCQ mit der Basis PC geleichschenklig ist, ist auch das Dreieck APB mit Basis AP gleichschenklig. Also schneidet der Kreis um B durch A Gerade AC auch in P. Damit ist P=T auch als Zielpunkt der Konstruktion K3 nachgewiesen.



Geometrischer Beweis K2 vs K3

Sei g die Sekrechte von B auf die Gerade QC. Spiegelt man das Dreieck BCQ an g, dann ist C'=S und SQ' hat die Länge QC. Damit ist Q' aber gerade der von K2 konstruierte Zielpunkt. Dieser stimmt mit dem P aus K3 überein, denn nach K3 liegt wegen Strecke PB=QB und P aus QC genau P auf Q'.

Damit konstruieren auch K1 und K2 denselben Punkt.

① Kr. um Q $(x-a)^2+(y-k)^2=k^2 \wedge \frac{k}{y}=\frac{a}{x}$

$(x-a)^2+y^2-2ky=0$

$(x-a)^2+y^2-2a\frac{y^2}{x}=0$

① $x(x-a)^2=y^2(2a-x)$

② kr. um 0 durch Q $x^2+y^2=v^2 \wedge \frac{v}{a}=\frac{y}{a-x}$

$x^2+y^2=a^2y^2\frac{1}{(a-x)^2}$ ② $(x^2+y^2)(a-x)^2=a^2y^2$

Polargleichung aus ②

$r^2(a-r\cos\varphi)^2=a^2r^2\sin^2\varphi$

$a-r\cos\varphi=\pm a\sin\varphi$

$r\cos\varphi=a(1\pm\sin\varphi)$

$r=a\frac{1\pm\sin\varphi}{\cos\varphi}$

Wie auch aus ① .

Wenn man die beiden Gleichungen ausmultipliziert, sieht man, dass in Gl. 2 ein Faktor x zuviel ist. Die y-Achse x=0 ist aber nicht Lösung des geometrischen Problems. Darum kann man durch dieses x dividieren und es kommt Gl 1 heraus. Übrigens: Durch Spiegeln von Dreieck BCP an QC kann man die Polargleichung auch geometrisch sehen.

③ $Q=(0,v)$ $S=(s,t)$: $t=v+y$ $s=a-x$ $\frac{v}{a}=\frac{y}{a-x}$

$\Rightarrow t=\frac{ay}{a-x}+y=\left(\frac{a}{a-x}+1\right)y=\frac{2a-x}{a-x}\cdot y$

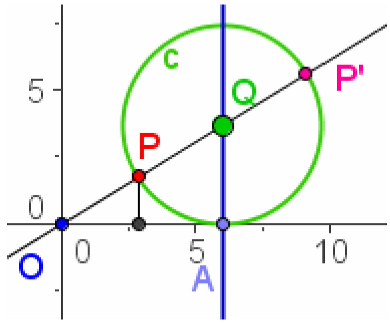
S auf Kreis $s^2+t^2=a^2$

$\Rightarrow (a-x)^2+t^2=a \iff x^2-2ax+\left(\frac{2a-x}{a-x}y\right)^2=0$

$x(x-2a)(a-x)^2+(2a-x)^2y^2=0 \quad | :(2a-x)$; $x=2a$ unmögl.

$x(a-x)^2=(2a-x)y^2$ ③ $\iff$ ①

Strophoide = *Seilkurve*



Konstruktionsbescheibung für die Strophoide

Anmerkung: Sie brauchen viel Platz oben und unten. Spiegeln Sie gefundene Punkte an der x-Achse.

1) Wähle A auf der x-Achse. Strecke $\overline{OA}$=a.
2) Errichte in A die Senkrechte auf die x-Achse.
3) Setze Q frei auf diese Senkrechte.
4) c sei der Kreis um Q durch A.
5) Kreis c schneidet die Gerade OQ in P und in P'.
6) Gesucht ist der Ort von P und P', wenn Q auf der Senkrechten läuft.

Aufgaben

a) Führen Sie die Konstruktion für einige Stellungen von Q durch.

b) Markieren Sie stets P und P' und spiegeln Sie alle Ihre Punkte an der x-Achse

c) Was ergibt sich, wenn Q auf A wandert.

d) Was geschieht, wenn Q immer höher wandert.

e) Deuten Sie in der Zeichnung an und verbalisieren Sie, wie die gesamte Strophoide aussieht.

f) Leiten Sie die Polargleichung (in Abhängigkeit von a) für die Strophoide her.

Ergebnis zur Sicherheit $r(\varphi)=\dfrac{a}{\cos(\varphi)} - a\tan(\varphi)$ oder $r(\varphi)=a\,\dfrac{1-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$

g) Leiten Sie geometrisch (Pyth., Strahlensatz) eine implizite kartesische Gleichung her. Ergebnis zur Sicherheit $x(a-x)^2=y^2(2a-x)$ $\boxed{1}$

h) Leiten Sie aus der Polargleichung eine implizite kartesische Gleichung her. her. Ergebnis zu Sicherheit $(x^2+y^2)(a-x)^2=a^2y^2$ $\boxed{2}$

i) Leiten aus dieser Gleichung aus h) eine Polargleichung der Strophoide her.

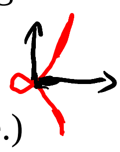
j) $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ sind nicht äquivalent, denn in $\boxed{2}$ ist die y-Achse Lösung, zeigen Sie das Letztere. Welche Rolle spielt hier der Grad jeder der Gleichungen? Gehört die y-Achse zu der Konstruktion?

k) Zeigen Sie mit einer der Gleichungen, dass sich für x=2a keine Punkte ergeben können. Begründen Sie dort eine Asymptote durch Betrachtung der Konstruktion.

l) Brgründen Sie auf irgendeine Weise, dass es keine Stophoidenpunkte für x>2a gibt.

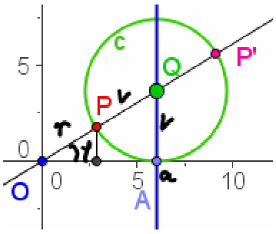
m) Welchen Einfluss auf die Form der Strophoide hat die Größe von a? Gesucht ist eine begründete mathematisch exakte Antwort.

n) Die Hundekurve (Konchoide des Nikomedes) hat in aufrechter Stellung die Gleichung $(x^2+y^2)(a-x)^2=k^2x^2$ $\boxed{3}$
Gibt es eine nichttriviale Hundekurve, evt. noch verschoben, die gleichzeitig Strophoide ist? (Mit Begründung auf irgendeine Weise.)



Strophoide

Ha 10.1.07



Polargleichung $Q(u,v)$ kartes.

$r = r_Q - v$ $\quad \frac{v}{a} = \tan\varphi \quad \frac{a}{r_Q} = \cos\varphi$

Also $\boxed{r = \frac{a}{\cos\varphi} - a\tan\varphi = a\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}}$ $\quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$

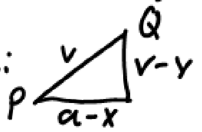
egal

Kartes. Gl. aus der Polargl.: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = x^2+y^2$

$r = \frac{ar}{x} - a\frac{y}{x} \Leftrightarrow rx = ar - ay \Leftrightarrow r(a-x) = ay$ | hoch 2

$r^2(a-x)^2 = a^2y^2 \Leftrightarrow \boxed{(x^2+y^2)(a-x)^2 = a^2y^2}$

Kartes. Gl. geometrisch:



$(a-x)^2 + (v-y)^2 = v^2$ J1 Gl. 4. Grades

$\frac{v}{a} = \frac{y}{x}$ Strahlensatz

$\Rightarrow (a-x)^2 + \left(\frac{ya}{x} - y\right)^2 = \frac{y^2a^2}{x^2}$ $\quad x \neq 0$

s

$(a-x)^2 + \cancel{\frac{y^2a^2}{x^2}} - 2\frac{a}{x}y^2 + y^2 = \cancel{\frac{y^2a^2}{x^2}}$ J1 und J2,

$\boxed{x(a-x)^2 = y^2(2a-x)}$ J2 3. Grades sind nicht äquivalent.

Für J1 wurde nämlich quadriert. Dadurch kann die Lösungsmenge größer werden. Hier ist die y-Achse als Lösung hinzugekommen: Denn $x=0$ eingesetzt: $(0+y^2)(a-0)^2 = a^2y^2$

$y^2a^2 = ay^2$

$0 = 0$ wahr für alle y.

Folgere für $x \neq 0$ J1 aus J2

J2 $x^2(a-x)^2 + y^2(a-x)^2 = a^2y^2$

$x^2(a-x)^2 + \cancel{y^2a^2} - 2axy^2 + y^2x^2 = \cancel{a^2y^2}$ $\quad$ | :x für $x \neq 0$

$x(a-x)^2 = 2ay^2 - y^2x$

$x(a-x)^2 = y^2(2a-x)$

das ist J1.

$x = 2a$ ist Asymptote

$2a(a-2a)^2 = y^2(2a-2a)$

$2a^2 = y^2 \cdot 0$

ist für kein y erfüllbar.

Für $2a < x$ kann es keine Punkte geben, denn die linke Seite ist positiv, die rechte negativ.

→ man sieht auch an der Konstruktion, dass P O nicht erreicht und damit P' $x=2a$ nicht.

Weiter: A ist Doppelpunkt

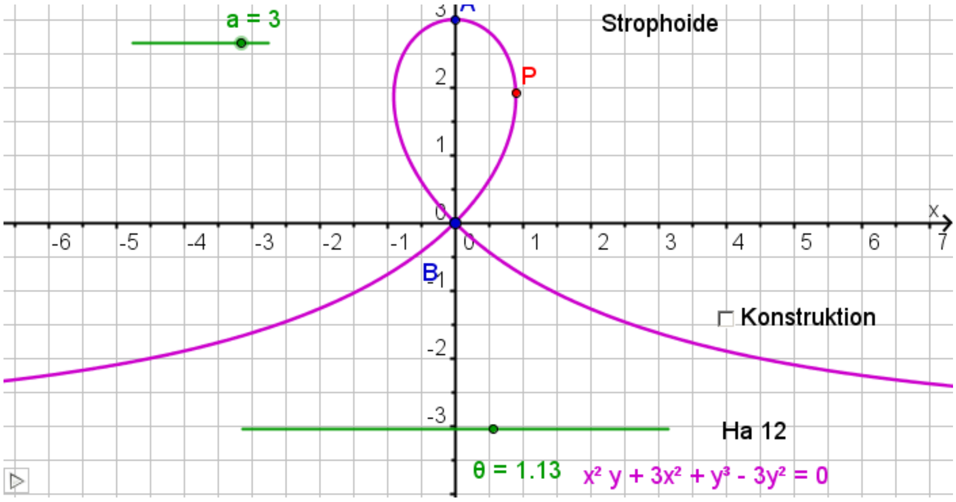
polar $A = (a,0)$ $\quad r(0) = \frac{a}{\cos 0} + a\tan 0 = a$

Im der Konstruktion sieht man das daran, dass P und P' zusammenfallen.

O wird von der Konstr. nicht erreicht

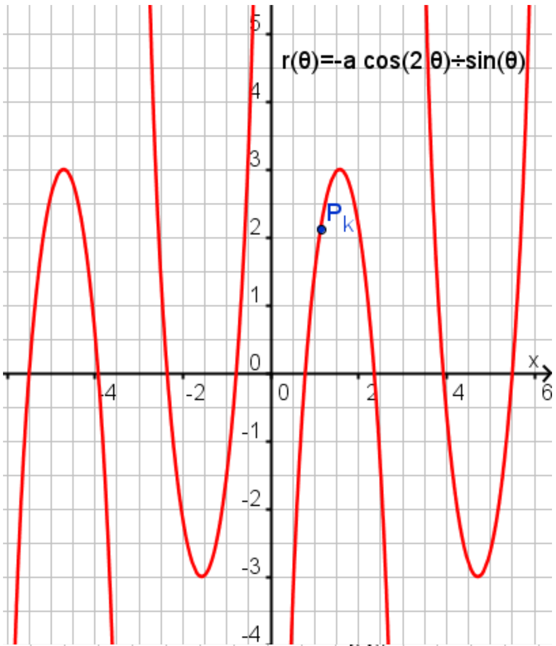
Die Herleitungen funktionieren nicht für $x=0$ bzw $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ J1 ist aber für O erfüllt.

Strophoide in expliziter und polarer Darstellung (ggb)



Beobachte, wie P sich bewegt, wenn theta zwischen -2 Pi und + 2 Pi läuft.

Ordne einigen typischen Kurvenpunkten einen Polarwinkel theta und einen Polarradius zu.

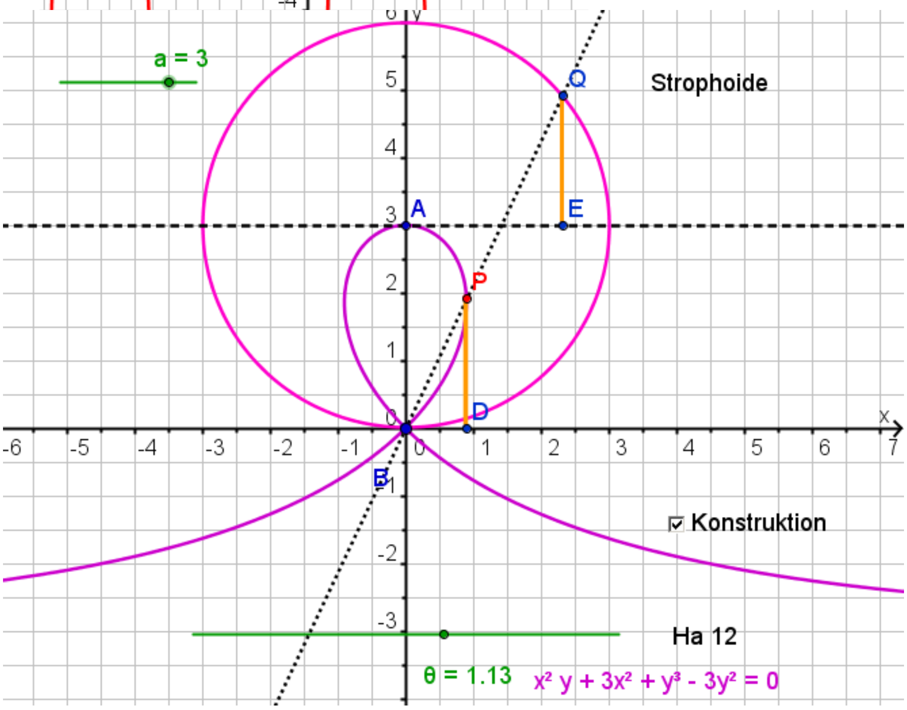


Verfolge dazu diese kartesiche Darstellung des Punktes P_k . Die Polargleichung ist hier eingetragen.
Die Rechtsachse hat die theta-Werte.

Leite die Polargleichung aus der expliziten Gleichung von Seite 34 her.

Beweise graphisch und durch Rechnung, dass sich die Schlaufe im 90°-Winkel schneidet, also dass im Ursprung die Tangentensteigung 1 und -1 ist.

Prüfe nochmals die Aussagen zu r und theta.



Ordne die Stellungen von Q den Stellungen von P zu.

Was wird mit einem Umlauf von Q erreicht?
Was wird erreicht, wenn theta von 0 bis 2 Pi läuft?

Anmerkung:
Die Konstruktion isthier „rückwärts“ gezeigt. Q ist abhängig von P.

In den Einstellungen ist „Kontinuität AN“ zu wählen, sonst bleibt Q „hängen“.

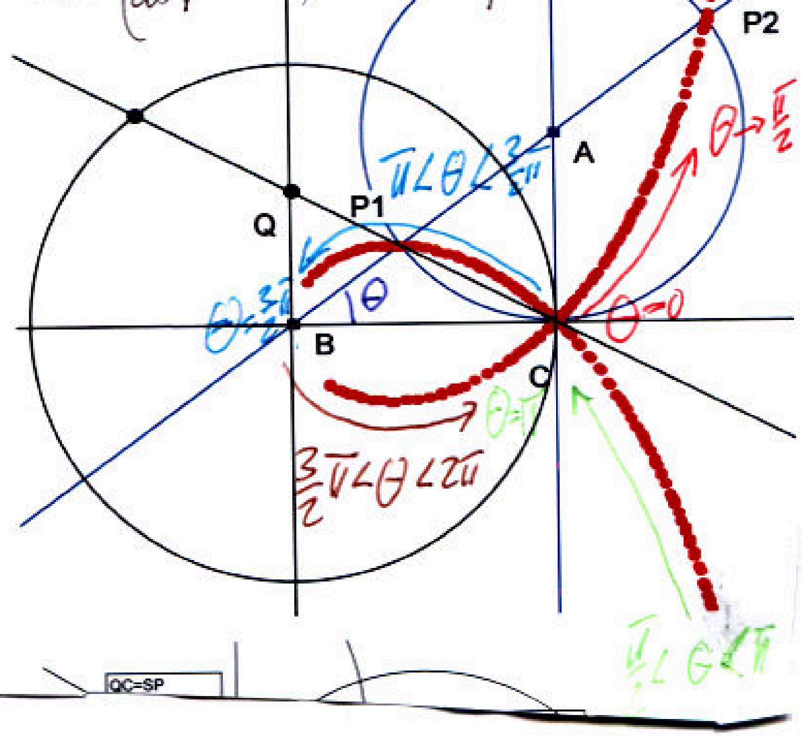
Strophoide. Durchlauf gemäß Polargleichung

Ha 12

$\oplus$

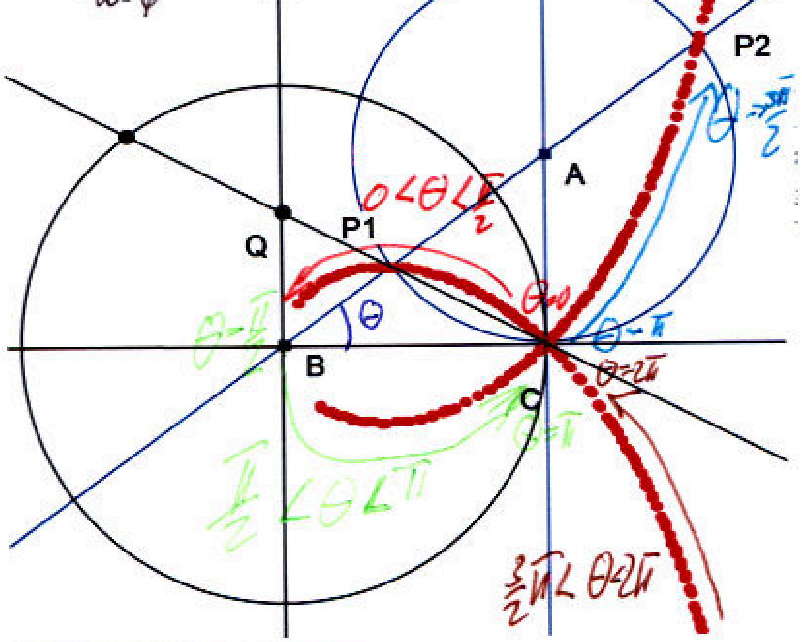
$$r = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} + \tan\varphi\right) = a\,\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$\overline{BC} = a$



$\ominus$

$$r = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \tan\varphi\right) = a\,\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

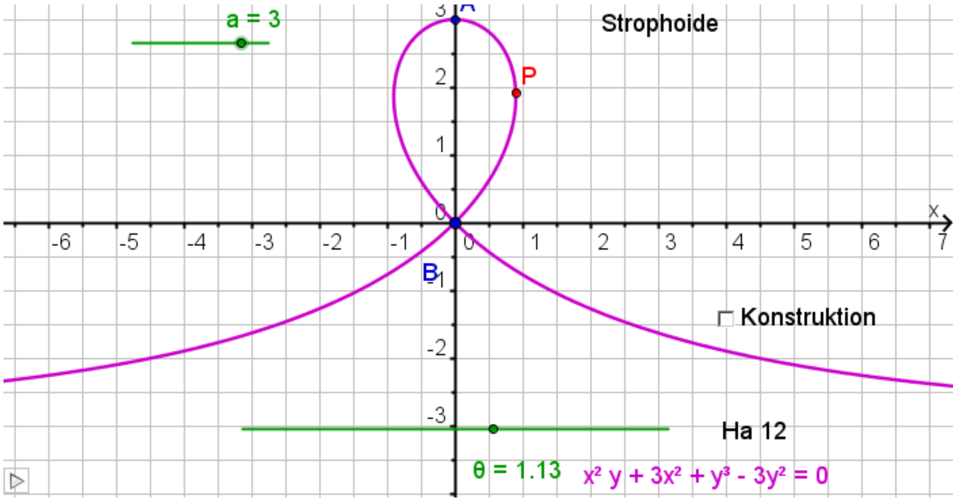


$$r_+ \cdot r_- = a^2\,\frac{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi} = a^2\,\frac{1-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = a^2$$

Daher kann man P_1 und P_2 als Inversionsbilder am Kreis $\odot(B,a)$ auffassen.

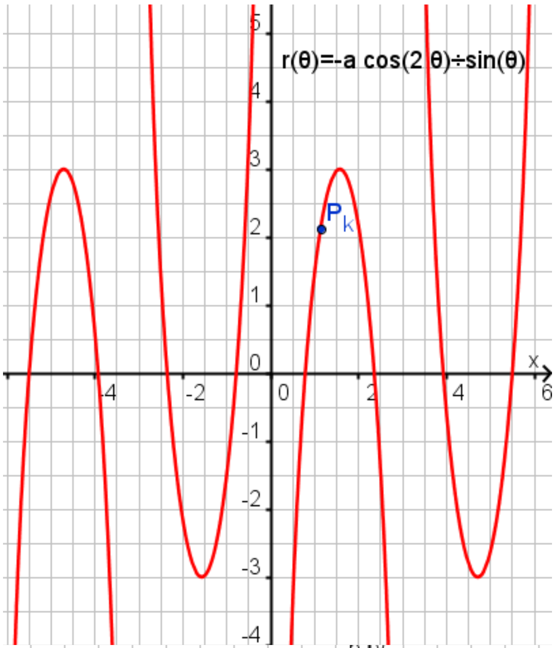
Deswegen ist die Strophoide eine Kurve, die bei Inversion am Kreis in sich übergeht. Solche Kurven heißen <u>anallagmatisch</u>.

Strophoide in expliziter und polarer Darstellung (ggb)



Beobachte, wie P sich bewegt, wenn theta zwischen -2 Pi und + 2 Pi läuft.

Ordne einigen typischen Kurvenpunkten einen Polarwinkel theta und einen Polarradius zu.

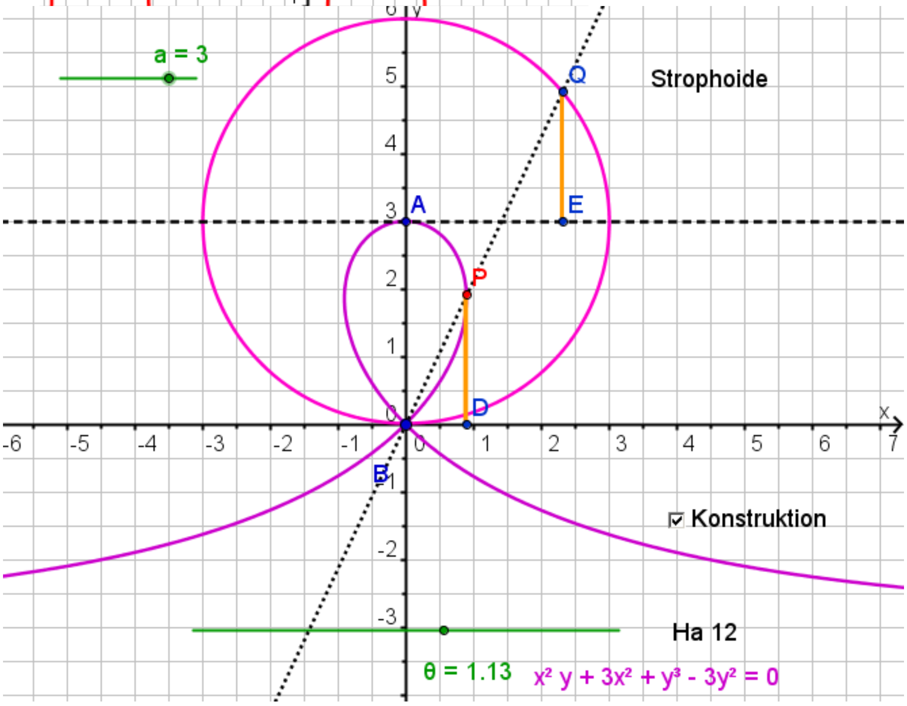


Verfolge dazu diese kartesiche Darstellung des Punktes P_k . Die Polargleichung ist hier eingetragen.
Die Rechtsachse hat die theta-Werte.

Leite die Polargleichung aus der expliziten Gleichung von Seite 34 her.

Beweise graphisch und durch Rechnung, dass sich die Schlaufe im 90°-Winkel schneidet, also dass im Ursprung die Tangentensteigung 1 und -1 ist.

Prüfe nochmals die Aussagen zu r und theta.



Ordne die Stellungen von Q den Stellungen von P zu.

Was wird mit einem Umlauf von Q erreicht?
Was wird erreicht, wenn theta von 0 bis 2 Pi läuft?

Anmerkung:
Die Konstruktion isthier „rückwärts“ gezeigt. Q ist abhängig von P.

In den Einstellungen ist „Kontinuität AN“ zu wählen, sonst bleibt Q „hängen“.

Strophoide und Hundekurve

stropho-hund.pdf

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Jan. 07 Update 10.01.07
Web: www.mathematik-verstehen.de http://haftendorn.uni-lueneburg.de

##

Sowohl manche Hundekurven als auch die Strophoide sehen schlaufenförmig aus. Man kann nun untersuchen, ob die Strophoide eine spezielle Hundekurve ist.

```
hunde:=(x^2+y^2)*(4-x)^2=64*x^2
```

$$(x-4)^2 \cdot (x^2+y^2) = 64 \cdot x^2$$

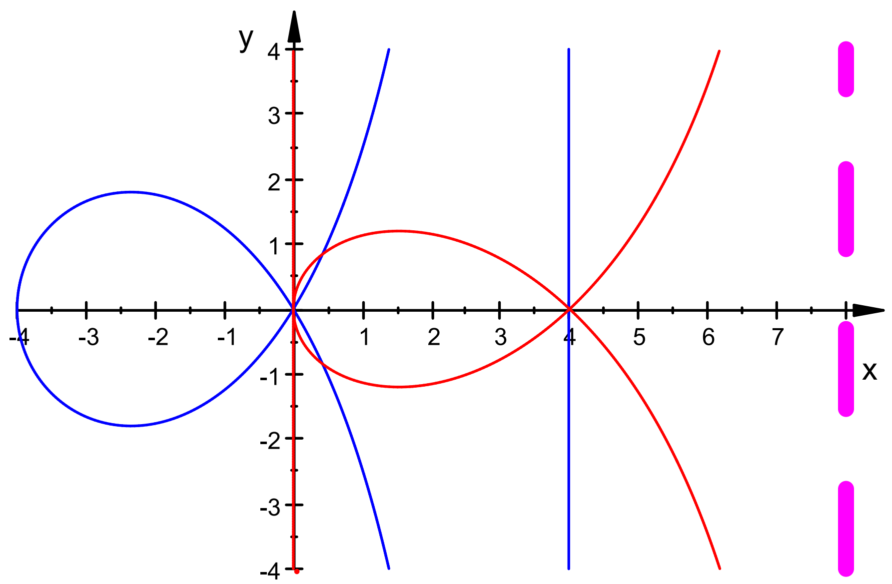
Dabei kommt nur eine Hundekurve infrage, bei der Leine doppelt so lang ist wie die Entfernung a des Baumes von der Straße. Hier ist a= 4 gesetzt.
Das schränkt die Allgemeinheit nicht ein, da alle Strophoiden durch zentrische Streckung
auseinander hervorgehen. (siehe Polargleichung)

```
stropho:=(x-4)^2*(x^2+y^2)=4^2*y^2
```

$$(x-4)^2 \cdot (x^2+y^2) = 16 \cdot y^2$$

Beide Gleichungen ähneln sich in verblüffender Weise.

```
hundeg:=plot::Implicit2d(hunde,x=-4..8,y=-4..4):
strophog:=plot::Implicit2d(stropho,x=-4..8,y=-4..4,
                LineColor=[1,0,0]):
asyh:=plot::Line2d([4,-4],[4,4]):
asys:=plot::Line2d([8,-4],[8,4], LineWidth=2,
                LineStyle=Dashed,LineColor=[1,0,1]):
plot(hundeg,asyh,asys, strophog);
```

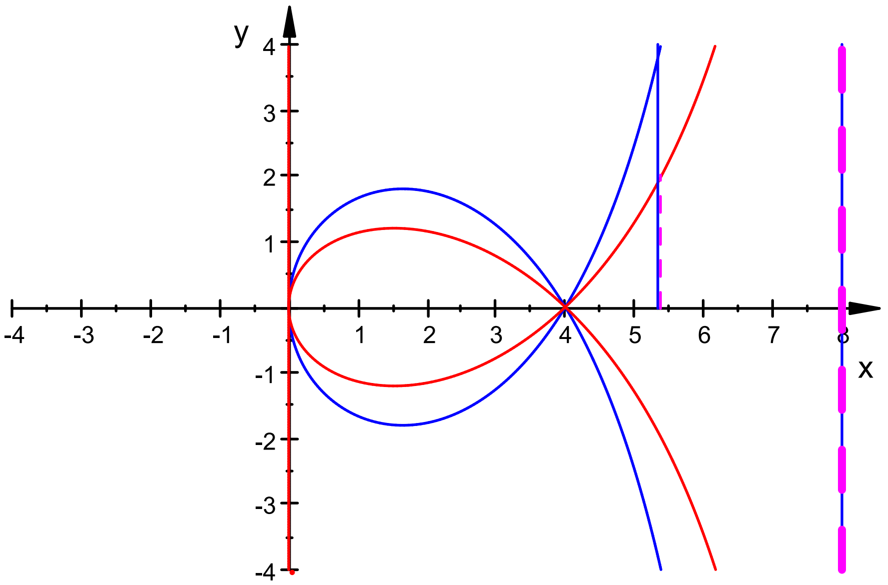


Mindestens muss man die blaue Hundekurve um 4 Einheiten nach rechts schieben. Vielleicht erreicht man dann noch etwas mit Stauchen.


```
verHunde:=((x^2+y^2)*(4-x)^2=64*x^2)|x=x-a;
```

```
verHundeg:=plot::Implicit2d(verHunde|a=4,x=-4..8,y=-4..4):
linie:=plot::Line2d([5.334,0],[5.334,4]):
linies:=plot::Line2d([5.36,0],[5.36,2],
                LineStyle=Dashed,LineColor=[1,0,1]):
asy:=plot::Line2d([8,-4],[8,4]):
asys:=plot::Line2d([8,-4],[8,4], LineWidth=1,
                LineStyle=Dashed,LineColor=[1,0,1]):
plot(verHundeg,asy,asys,strophog,linie, linies):
```

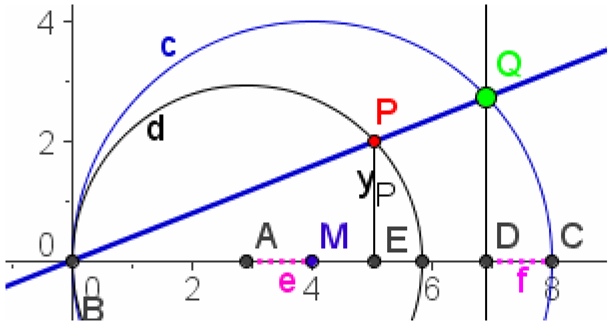
$$\left(y^2 + (a - x)^2\right) \cdot (a - x + 4)^2 = 64 \cdot (a - x)^2$$



Nun liegen alle wesentlichen Elemente aufeinander. An den Ordinaten bei 5
ist zu sehen, dass ein Stauchfaktor etwa 2 sein müsste. Das ist aber für die
Schlaufen zuviel. Daher kann die Strophoide nicht durch durch eine Hundekurve dargestellt
werden.
Im Übrigen hat die Hundekurve noch einen weiteren Ast, der mit der Strophoide nichts zu tun hat.
Dafür hat diese Stophoidengleichung überflüssigerweise noch die y-Achse als Lösung.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass man die algebraischen Kurven nicht grob vom Aussehen her
richtig bestimmen kann.

Dreiblatt



Konstruktionsbescheibung für das Dreiblatt

1) Wähle M auf der x-Achse und um M einen Kreis c durch den Urspung B. Sein anderer Schnittpunkt mit der x-Achse sei C. Benenne seinen Radius mit R.
2) Setze Q frei auf dem Kreis c.
3) Fälle das Lot von Q auf die x-Achse , der Fußpunkt sei D.
4) E entsteht durch Spiegeln von C an D.
5) A sei Mittelpunkt der Strecke BE.
6) d sei der Kreis um A durch B.
7) Kreis d schneidet die Gerade BQ in P.
8) Gesucht ist der Ort von P, wenn Q auf dem Kreis c läuft.

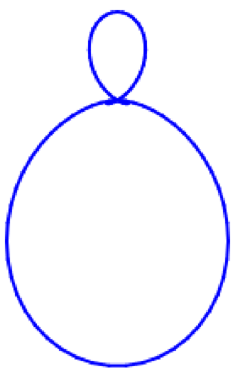
Anmerkung: Die Konstruktion erzwingt, dass die Strecken e und f gleich sind.

Aufgaben:

a) Führen Sie die Konstruktion für einige Punkte durch.
b) Spiegeln Sie alle Ihre Punkte an der x-Achse
c) Beachten Sie besondere Stellungen von Q und sichern Sie für diese die Lage von P verbal.
d) Deuten Sie in der Zeichnung an und verbalisieren Sie, wie das gesamte Dreiblatt aussieht.
e) Leiten Sie die Polargleichung (in Abhängigkeit von R) für das Dreiblatt her. Dabei können Sie ohne Beweis verwenden, dass Kreise der gezeichneten Art die Gleichung $r(\varphi) = 2\rho\cos(\varphi)$ haben. Ergebnis zu Sicherheit

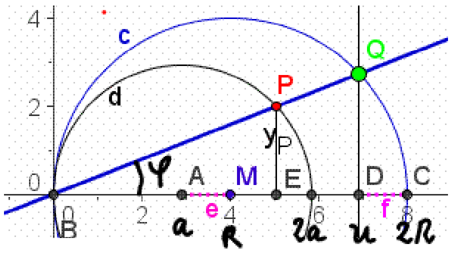
   $r(\varphi) = 2R\cos(\varphi)\left(2\cos^2(\varphi) - 1\right)$
f) Leiten Sie daraus eine implizite kartesische Gleichung des Dreiblattes her.

   Gestalt $(....)^2 = faktor \cdot (.....)$
g) Bestätigen Sie sichere Punkte in der Polargleichung und der impliziten Gleichung.
h) Machen Sie sich die Zusammenhänge an der polar-kartesischen Koppelung klar.
i) Welchen Einfluss auf die Form des Dreiblattes hat der Radius R.
j) "Schneemann mit Fliege" Ergänzungen zum Üben
   - Untersuchen Sie mit MuPAD auch die Kurve zu $r(\varphi) = 2R\cos(\varphi)\left(2\cos(\varphi) - 1\right)$
   - Leiten Sie daraus die implizite Gleichung $(....)^2 \cdot (.....) = \left(4R^2x^2\right)$ her.
   - Bestätigen Sie sichere Punkte in der Polargleichung und der impliziten Gleichung.
   - Machen Sie sich die Zusammenhänge an der polar-kartesischen Koppelung klar.
   - Warum verliert der implizite Schneemann seine Fliege?



Dreiblatt

Ha 10.1.07



Polargleichung $\overline{MB}=R$; $\overline{AB}=a$; $\overline{DB}=u$

Q auf Kreis $r_Q = 2R\cos\varphi$

P auf Kreis $r = 2a\cos\varphi$ *

gesucht $a = a(R,\varphi)$

$u = \frac{1}{2}(2a+2R)$ $\quad u = r_Q \cdot \cos\varphi$

$u = a+R$ $\quad u = 2R\cos\varphi\cdot\cos\varphi$

$a = u-R$ $\quad \Rightarrow$ $a = 2R\cos^2\varphi - R$

in * $r = 2(2R\cos^2\varphi - R)\cos\varphi$

Dreiblatt $\boxed{r = 2R\cos\varphi\,(2\cos^2\varphi - 1)}$ Polargleichung

kartesische Gleichung $x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$ $\quad r^2 = x^2+y^2$

$r = 2R\frac{x}{r}\left(2\frac{x^2}{r^2} - 1\right) \quad |\cdot r^3$

$r^4 = 2Rx\,(2x^2 - r^2)$

$(x^2+y^2)^2 = 2Rx\,(2x^2-x^2-y^2)$ $\quad \Rightarrow$ $\boxed{(x^2+y^2)^2 = 2Rx\,(x^2-y^2)}$

Kartesische Gleichung

Weiteres: $C \in$ Dreiblatt $\quad$ Polar: $C = (2R/0)$ $\quad r(0) = 2R\cos 0\,(2\cdot\cos^2 0 - 1)$

Q in C $\quad = 2R\cdot 1\,(2-1) = 2R$ o.k.

kartes. $C = (2R/0)$ $\quad \left((2R)^2+0\right)^2 = 2R\cdot 2R\,\left((2R)^2 - 0\right)$

$(4R^2)^2 = 4R^2\cdot 4R^2$ wahre Aussage

$O = B(0/\frac{\pi}{2}) \in$ Dreiblatt $\quad$ Polar $\quad 0 = 2R\cos\frac{\pi}{2}\left(2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Sonderfall Q in O=B $\quad 0 = 2R\cdot 0\cdot(-1)$

$0 = 0$ wahre Aussage

$O = (0/0)$ kartesisch $\quad$ kartes $(0+0)^2 = 2\cdot R\cdot 0\,(0-0)$

$0 = 0$ wahre Aussage

$O = (0/\frac{\pi}{4}) \in$ Dreiblatt $\quad$ Polar $\quad 0 = 2R\cdot\cos\frac{\pi}{4}\left(2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1\right)$

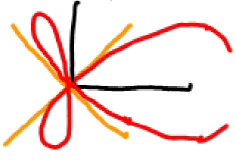
Sonderfall $Q = (R/R)$ $\quad 0 = 2R\cos\frac{\pi}{4}\left(2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 1\right)$

$0 = 2R\cos\frac{\pi}{4}(1-1)$

$0 = 0$ wahre Aussage

Finden dieses Falles $2\cos^2\varphi - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ ....

kartesisch: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow y = \pm x$ Winkelhalbierende

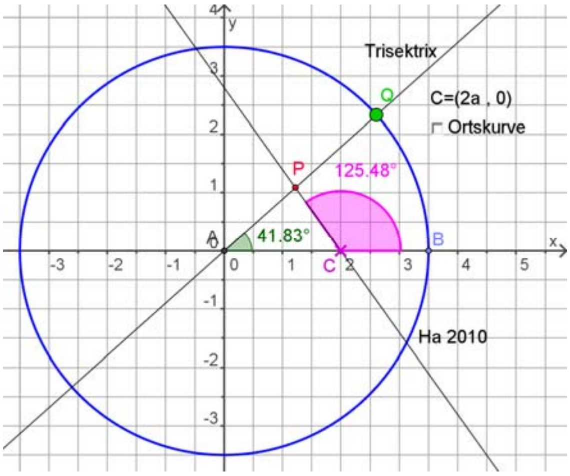


$\Rightarrow (x^2+x^2)^2 = 2Rx\,(0) \Leftrightarrow x = 0$, dann auch $y = 0$

Das Dreiblatt hat mit beiden Wh. nur den Ursprung gemeinsam.

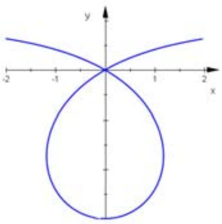
Kurven Trisektrix

Lösungen im Internet , Bereich Kurven, Höhere



Konstruktion: Q läuft auf einem Kreis um den Ursprung A. Punkt C liegt auf der x-Achse in der Entfernung 2a. Der Polarwinkel von Q wird verdreifacht in C an die x-Achse angetragen. Der zweite Schenkel dieses Winkels schneidet die Radiusgerade durch Q in P. Der Ort von P heißt **Trisektrix**.

Die folgende Aufgabe war ein Teil einer Kurven-Klausur, bei dem es nicht um diese Konstruktion ging.
Lernziele waren: Erzeugung der Polargleichung aus einer impliziten Gleichung, Deutung der Gleichungen in vielfacher Hinsicht.



Dies ist die Trisektrix, ihre implizite Gleichung ist

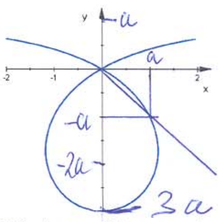
$$x^2(a-y) = y^2(3a+y)$$

e) Leiten Sie ihre Polargleichung aus der impliziten Darstellung her.

f) Weisen Sie nach, dass A=(a,-a) ein Punkt der Trisektrix ist. Bestimmen Sie in der Darstellung die Beschriftung der y-Achse in Abhängigkeit vom Parameter a.

g) Stellen Sie Überlegungen an:
   a. Zum Einfluss von a
   b. Zur Symmetrie
   c. Zur Asymptotenproblematik
   d. Zu der Möglichkeit für andere Formen der Trisektrix (Mit Spitze, mit stumpfem Bogen…)
   e. Zum Grad der Kurve (zwei Eigenschaften)

Zeichnung zur Lösung, nachfolgend Lösung ausführlich.



d) Dies ist die Trisektrix, ihre implizite Gleichung ist

$$x^2(a-y) = y^2(3a+y)$$

e) Leiten Sie ihre Polargleichung aus der impliziten Darstellung her.

f) Weisen Sie nach, dass A=(a,-a) ein Punkt der Trisektrix ist. Bestimmen Sie in der Darstellung die Beschriftung der y-Achse in Abhängigkeit vom Parameter a.

g) Stellen Sie Überlegungen an:
   a. Zum Einfluss von a
   b. Zur Symmetrie
   c. Zur Asymptotenproblematik
   d. Zu der Möglichkeit für andere Formen der Trisektrix (Mit Spitze, mit stumpfem Bogen…)
   e. Zum Grad der Kurve (zwei Eigenschaften)

Kurven Efeukurve, Kissoide

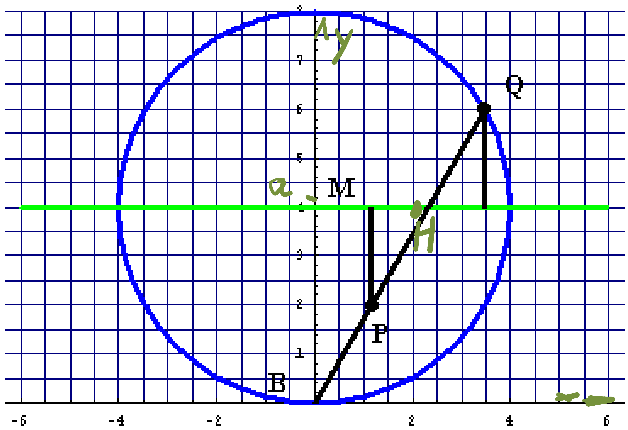
Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME:

MA LBS Uf **Modul 2 Kurven und Geometrie-Wdh.** , Note

Teil a) Algebraische Kurven

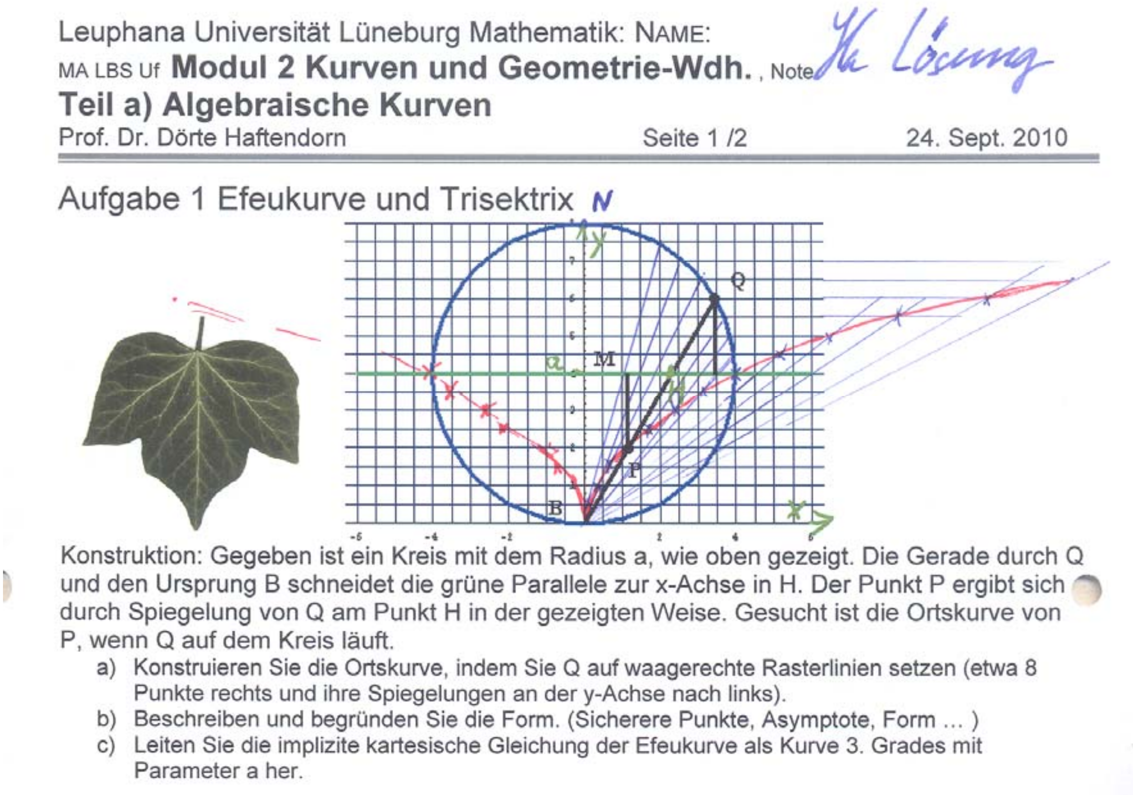
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Seite 1 /2 24. Sept. 2010

Aufgabe 1 Efeukurve und ~~Trisektrix~~



Konstruktion: Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius a, wie oben gezeigt. Die Gerade durch Q und den Ursprung B schneidet die grüne Parallele zur x-Achse in H. Der Punkt P ergibt sich durch Spiegelung von Q am Punkt H in der gezeigten Weise. Gesucht ist die Ortskurve von P, wenn Q auf dem Kreis läuft.

a) Konstruieren Sie die Ortskurve, indem Sie Q auf waagerechte Rasterlinien setzen (etwa 8 Punkte rechts und ihre Spiegelungen an der y-Achse nach links).
b) Beschreiben und begründen Sie die Form. (Sicherere Punkte, Asymptote, Form …)
c) Leiten Sie die implizite kartesische Gleichung der Efeukurve als Kurve 3. Grades mit Parameter a her.



Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME: Ha Lösung

MA LBS Uf **Modul 2 Kurven und Geometrie-Wdh.** , Note

Teil a) Algebraische Kurven

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Seite 1 /2 24. Sept. 2010

Aufgabe 1 Efeukurve und Trisektrix N

Konstruktion: Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius a, wie oben gezeigt. Die Gerade durch Q und den Ursprung B schneidet die grüne Parallele zur x-Achse in H. Der Punkt P ergibt sich durch Spiegelung von Q am Punkt H in der gezeigten Weise. Gesucht ist die Ortskurve von P, wenn Q auf dem Kreis läuft.

a) Konstruieren Sie die Ortskurve, indem Sie Q auf waagerechte Rasterlinien setzen (etwa 8 Punkte rechts und ihre Spiegelungen an der y-Achse nach links).
b) Beschreiben und begründen Sie die Form. (Sicherere Punkte, Asymptote, Form …)
c) Leiten Sie die implizite kartesische Gleichung der Efeukurve als Kurve 3. Grades mit Parameter a her.

weitere Lösung im Internet